数学演習第一（演習第１回）微積：極限値, 逆三角関数【解答例】

(2020 年 5 月 27 日実施)

$\boxed{1}$ $\boxed{\text{小テスト}}$

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+2x)}{x}=\lim_{x\to 0}2\cdot\frac{\log(1+2x)}{2x}=\boxed{2}$.

(2) $\alpha=\mathrm{Cos}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ とおけば, $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $0\le\alpha\le\pi$ であるから, $\alpha=\boxed{\frac{5\pi}{6}}$.

(3) $\alpha=\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$ とおけば, $\tan\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ であるから, $\alpha=\boxed{\frac{\pi}{6}}$.

(4) $\sin\frac{3\pi}{5}=\sin\left(\pi-\frac{3\pi}{5}\right)=\sin\frac{2\pi}{5}$ より, $\mathrm{Sin}^{-1}\left(\sin\frac{3\pi}{5}\right)=\mathrm{Sin}^{-1}\left(\sin\frac{2\pi}{5}\right)=\boxed{\frac{2\pi}{5}}$.
定義より, $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ の場合に限って, $\mathrm{Sin}^{-1}(\sin\theta)=\theta$ が成り立つ.

$\boxed{2}$ (1) $x\to 0$ のとき, $\displaystyle\frac{\sin ax-\sin bx}{x}=a\cdot\frac{\sin ax}{ax}-b\cdot\frac{\sin bx}{bx}\to a-b$.

(6) $y=x-\frac{\pi}{3}$ とおくと, $x\to\frac{\pi}{3}$ のとき $y\to 0$. このとき, $\displaystyle\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-1}{x-\frac{\pi}{3}}=\frac{\sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right)-1}{y}=\frac{\cos y-1}{y}=-\frac{(1-\cos y)(1+\cos y)}{y(1+\cos y)}=\frac{-\sin^2 y}{y(1+\cos y)}=\left(\frac{\sin y}{y}\right)^2\frac{-y}{1+\cos y}\to 1\cdot 0=0$.

(7) $y=x-\pi$ とおくと, $x\to\pi$ のとき $y\to 0$. また, $\cos x=\cos(y+\pi)=-\cos y$, $\tan x=\tan(y+\pi)=\tan y$ なので, $\displaystyle\frac{1+\cos x}{(x-\pi)\tan x}=\frac{1-\cos y}{y\tan y}=\frac{(1-\cos y)(1+\cos y)}{y\sin y}\frac{\cos y}{1+\cos y}=\frac{\sin y}{y}\frac{\cos y}{1+\cos y}\to\frac{1}{2}$ $(y\to 0)$.
【注】 (6), (7) の解答例では, $1-\cos x$ を $1-\cos x=\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1+\cos x}=\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}$ と変形したが, 半角の公式により $1-\cos x=2\sin^2(x/2)$ と変形する方法もよく用いられる. この変形から容易に得られる極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ は基本的.

(8) $x\to 0$ のとき, $\sin x\to 0$ であるから, $\displaystyle\frac{\tan(\sin x)}{\tan x}=\frac{\sin(\sin x)}{\cos(\sin x)}\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}\frac{\cos x}{\cos(\sin x)}\to 1$.
あるいは, $\displaystyle\frac{\tan x}{x}=\frac{\sin x}{x}\cdot\cos x\to 1$ を用いて, $\displaystyle\frac{\tan(\sin x)}{\tan x}=\frac{\tan(\sin x)}{\sin x}\frac{x}{\tan x}\frac{\sin x}{x}\to 1$.

(9) まず, $\displaystyle\frac{a^x-1}{x}=\frac{e^{x\log a}-1}{x\log a}\cdot\log a\to\log a$ $(x\to 0)$. これを用いて, $\displaystyle\frac{x}{e^{2x}-2^x}=\frac{1}{\frac{e^{2x}-1}{x}-\frac{2^x-1}{x}}\to\frac{1}{2-\log 2}$ $(x\to 0)$.

(11) $y=\frac{\pi}{2}-x$ とおくと, $x\to\frac{\pi}{2}-0$ のとき $y\to+0$. このとき, $\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\tan x=y\tan\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=\displaystyle\frac{y}{\tan y}=\frac{y}{\sin y}\cdot\cos y\to 1$.

(12) 自然対数をとって考える. $y=1-x$ $(x=1-y)$ とおくと, $x\to 1$ のとき $y\to 0$ であり, $\log(2x-1)^{\frac{1}{1-x}}=\displaystyle\frac{\log(2x-1)}{1-x}=\frac{\log(1-2y)}{y}\to-2$. よって, $(1-2x)^{\frac{1}{1-x}}=e^{\log(1-2x)^{\frac{1}{1-x}}}\to e^{-2}$ $(=1/e^2)$.

(13) 自然対数をとって考える. $\cos x=1+(\cos x-1)$ と分解し, (7) と同様な計算を用いて ((7) の【注】も参照), $\log(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\displaystyle\frac{\log(\cos x)}{x^2}=\frac{\log(1+\cos x-1)}{x^2}=\frac{\log(1+(\cos x-1))}{\cos x-1}\frac{\cos x-1}{x^2}\to 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$ $(x\to 0)$. よって, $(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\log(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}}\to e^{-1/2}$ $\left(=\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$.

【注】関数 $f(x)^{g(x)}$ の ($x\to a$ での) 極限値を求めるためには, log をとった関数 $\log f(x)^{g(x)}=g(x)\log f(x)$ の極限値が求まればよい. 実際, log をとる操作は “e の肩に載せた表現” (ここでは $f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\log f(x)}$ という変形) を与えるから, 指数関数 e^x の連続性により $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}=$

$e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\log f(x)}$ が成り立つ.

$\boxed{3}$ (5) $\alpha = \mathrm{Tan}^{-1}(-3)$ とおいて, $\cos\alpha$ の値を求める. $\tan\alpha = -3$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$ であるから, $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha = 10$. よって, $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

(6) $\alpha = \mathrm{Sin}^{-1}\left(-\dfrac{1}{4}\right)$ とおいて, $\tan\alpha$ の値を求める. $\sin\alpha = -\dfrac{1}{4}$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2}\right)$ であるから, $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = \dfrac{15}{16}$ となり, $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$. よって, $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{-1/4}{\sqrt{15}/4} = -\dfrac{1}{\sqrt{15}}$.

$\boxed{4}$ (1) $\alpha = \mathrm{Tan}^{-1} 2$ とおくと, $\tan\alpha = 2$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$ かつ $\mathrm{Cos}^{-1} x = \alpha$. このとき, $\tan\alpha = 2 > 0$ より $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. よって, $\mathrm{Cos}^{-1} x = \alpha$ は解をもち, $x = \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ で与えられる.

(2) $\alpha = \mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{1}{4}$ とおくと, $\sin\alpha = \dfrac{1}{4}$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2}\right)$ かつ $\mathrm{Sin}^{-1} x = \dfrac{\pi}{2} - 2\alpha$. このとき, $\sin\alpha = \dfrac{1}{4} \in (0,1)$ より $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ となり, $-\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{\pi}{2} - 2\alpha < \dfrac{\pi}{2}$. よって, $\mathrm{Sin}^{-1} x = \dfrac{\pi}{2} - 2\alpha$ は解をもち, $x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = \dfrac{7}{8}$ で与えられる.

(3) $\alpha = \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{5}$ とおくと, $\tan\alpha = \dfrac{1}{5}$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$ かつ $\mathrm{Tan}^{-1} x = \dfrac{\pi}{4} - 2\alpha$. このとき, $\tan\alpha = \dfrac{1}{5} \in (0,1)$ より $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4}$ となり, $-\dfrac{\pi}{4} < \dfrac{\pi}{4} - 2\alpha < \dfrac{\pi}{4}$. よって, $\mathrm{Tan}^{-1} x = \dfrac{\pi}{4} - 2\alpha$ は解をもち, $x = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} - 2\alpha\right) = \dfrac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan 2\alpha}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\tan 2\alpha} = \dfrac{1 - \tan 2\alpha}{1 + \tan 2\alpha}$ で与えられる. ここで, $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} = \dfrac{5}{12}$ であるから, $x = \dfrac{1 - \frac{5}{12}}{1 + \frac{5}{12}} = \dfrac{7}{17}$ となる.

【注】この種の方程式は解をもたないことがある. 例えば, $\mathrm{Cos}^{-1} x = \mathrm{Tan}^{-1}(-2)$ は (1) と似ているが, 解をもたない. 実際, $\mathrm{Tan}^{-1}(-2) \in (-\pi/2, 0)$ は関数 $\mathrm{Cos}^{-1} x$ の値域 $[0,\pi]$ に含まれない.

$\boxed{5}$ (1) $\theta = \mathrm{Sin}^{-1} x$ とおくと, $\sin\theta = x$ $(-\pi/2 \le \theta \le \pi/2)$. このとき $x = \sin\theta = \cos(\pi/2 - \theta)$ かつ $0 \le \pi/2 - \theta \le \pi$ であるから, Cos^{-1} の定義により $\pi/2 - \theta = \mathrm{Cos}^{-1} x$. よって, $\mathrm{Sin}^{-1} x + \mathrm{Cos}^{-1} x = \theta + (\pi/2 - \theta) = \pi/2$.

(2) $\theta = \mathrm{Tan}^{-1} x$ とおくと, $\tan\theta = x$. ここで, $x > 0$ より $0 < \theta < \pi/2$. このとき,

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin(\pi/2 - \theta)}{\cos(\pi/2 - \theta)} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

かつ $0 < \pi/2 - \theta < \pi/2$ であるから, Tan^{-1} の定義より $\pi/2 - \theta = \mathrm{Tan}^{-1}(1/x)$. よって, $\mathrm{Tan}^{-1} x + \mathrm{Tan}^{-1}(1/x) = \theta + (\pi/2 - \theta) = \pi/2$.

【注】 $x < 0$ のときには, $\mathrm{Tan}^{-1} x + \mathrm{Tan}^{-1}(1/x) = -\pi/2$ が成り立つ.

$\boxed{6}$ (1) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = (\cosh x + \sinh x)(\cosh x - \sinh x) = e^x \cdot e^{-x} = 1$.

(2) $X = e^x\ (>0)$ とおくと, $y = \sinh x = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \dfrac{1}{2}\left(X - \dfrac{1}{X}\right)$ より, $X^2 - 2yX - 1 = 0$ となるので, $X = e^x = y + \sqrt{y^2+1}$. よって, $y = \sinh x$ の逆関数は, $x = \log(y + \sqrt{y^2+1}\,)$.
同様に, $y = \tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{X - X^{-1}}{X + X^{-1}} = \dfrac{X^2 - 1}{X^2 + 1}$ より $X^2 = e^{2x} = \dfrac{1+y}{1-y}\ (>0)$. よって, $y = \tanh x$ の逆関数は, $x = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+y}{1-y}$ $\left(= \log\sqrt{\dfrac{1+y}{1-y}}\right)$ $(-1 < y < 1)$.

(3) (2) と同様な考え方により, $y = \cosh x$ $(x \ge 0)$ の逆関数は $x = \log(y + \sqrt{y^2-1})$. また, $y = \cosh x$ $(x \le 0)$ の逆関数は $x = \log(y - \sqrt{y^2-1})$ $(= -\log(y + \sqrt{y^2-1}\,))$.