数学演習第一 （演習第２回）

線形：平面の方程式, 行列の演算　2020 年 6 月 3 日

- $\boxed{\textbf{小テスト}}$ の問題 (題材) は † の付いたの 4 問です. ($\boxed{1}$(2), $\boxed{2}$(1), $\boxed{3}$(3), $\boxed{6}$(1)①)
- $\boxed{\textbf{レポート課題}}$ の問題は $*$ の付いたの 4 問です. ($\boxed{2}$(2), $\boxed{3}$(2), $\boxed{4}$(1), $\boxed{6}$(2))
  どちらも**３枚目**にまとめて書いてあります.

要点１

《表記上の注意》

- 高校ではベクトルを $\overrightarrow{p}$ (矢印) の形で表したが, ここでは $\boldsymbol{p}$ (太字) と表記する. 零ベクトルは $\mathbf{0}$ で表す.
- ベクトル $\boldsymbol{p}$ に対して,「点 $\boldsymbol{p}$」は $\boldsymbol{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ (O は原点) となる点 P を表す ($\boldsymbol{p}$ は点 P の位置ベクトル).

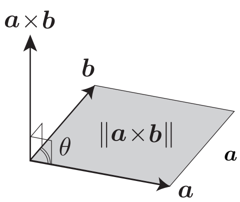
$\boxed{\text{I}}$ 空間ベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$ に対して,

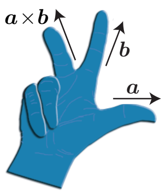
- $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}:=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$, $\|\boldsymbol{a}\|:=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$ をそれぞれ $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ の**内積**, $\boldsymbol{a}$ の**長さ** (**大きさ**, **ノルム**) という. $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0}$ のとき, $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ のなす角を $\theta\in[0,\pi]$ とすれば, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\cos\theta$ が成り立つ. (平面ベクトルに対しても同様)
- $\boxed{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}:=\begin{bmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{bmatrix}}$ を $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ の **外積** (= **ベクトル積**) と呼ぶ. 線形 p. 8

  $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0}$ が平行でないとき, $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ のなす角を $\theta\in(0,\pi)$ とすれば,

  ① $\boxed{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\text{ は }\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\text{ の両方と垂直}}$,　② $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ は**右手系**,

  ③ $\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|=\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\sin\theta$ = ($\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ が作る平行四辺形の面積).



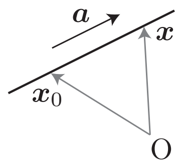


$\boxed{\text{II}}$ 空間の点 $\boldsymbol{x}_0=\begin{bmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{bmatrix}$ とベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}\neq\mathbf{0}$ に対して,

- 点 $\boldsymbol{x}_0$ を通り, $\boldsymbol{a}$ を**方向ベクトル**とする直線 ($\boldsymbol{a}$ と平行な直線) の方程式は, 線形 p. 11

$$\underset{\text{(ベクトル方程式)}}{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{a}}\ \left(\Leftrightarrow\ \begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\\z=z_0+ct\end{cases}\right)\ \text{より,}\ \boxed{\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}}.$$

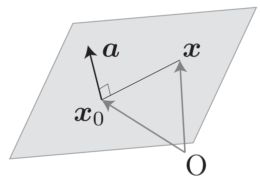
(右の表現は $abc\neq0$ の場合の形. 例えば $ab\neq0, c=0$ なら, $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}, z=z_0$ となる.)



- 点 $\boldsymbol{x}_0$ を通り, $\boldsymbol{a}$ を**法線ベクトル**とする平面 ($\boldsymbol{a}$ と垂直な平面) の方程式は, 線形 p. 12

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)=0,\quad\text{すなわち}\quad\boxed{a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0}.$$

(右の表現は通常 $ax+by+cz+d=0$ または $ax+by+cz=d$ の形に整理する.)



$\boxed{\mathbf{1}}$ ベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}4\\1\\1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}2\\2\\-1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}$ に対して, 以下を計算せよ. ((5), (6) については線形 第 I 章参照)

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$　(2)† $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$　(3) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ のなす角　(4) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ の作る三角形の面積

(5) $\boldsymbol{b}$ の $\boldsymbol{a}$ 方向 (の直線) への正射影　(6) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ の作る平行六面体の体積

$\boxed{\mathbf{2}}$ 空間の 3 点 A$(1,0,2)$, B$(2,-3,0)$, C$(-1,2,1)$ について, 次の問いに答えよ.

(1)† 2 点 A, B を通る直線 (以下, 直線 ℓ) の方程式を求めよ. (ヒント: $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ が方向ベクトル)

(2)* 3 点 A, B, C を通る平面 (以下, 平面 P) の方程式を求めよ. (ヒント: $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ が法線ベクトル)

(3) 原点 O から平面 P に垂線 OH を下ろすとき, 点 H の座標と垂線 OH の長さを求めよ.

(4) 点 C から直線 ℓ に垂線 CK を下ろすとき, 点 K の座標と垂線 CK の長さを求めよ.

要点２

- $l\times m$ 行列 A と $m\times n$ 行列 B に対して, $l\times n$ 行列 AB (A,B の積) が次により定義される: AB の (i,j) 成分は A の第 i 行と B の第 j 列の "内積" である. また, B の (i,j) 成分を (j,i) 成分とする $n\times m$ 行列を B の転置行列と呼び, ${}^{\mathrm{t}}B$ で表す.
- 同じサイズの正方行列 A,B に対して, 積 AB,BA が定義されるが, 数の場合と異なり, 「$AB=BA$」「$AB=O \Rightarrow A=O$ or $B=O$」が成り立つとは限らない.
- 正方行列 A に対して, $AB=BA=E$ を満たす B が存在するとき (存在すれば一意), B を A の逆行列と呼び, A^{-1} で表す. また, 逆行列をもつ行列を正則行列という. 2 次正方行列の場合は

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix} \text{ が正則 } \Leftrightarrow\ ad-bc\neq 0. \quad \text{このとき, } A \text{ の逆行列は } \boxed{A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a\end{bmatrix}}.$$

3 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4\end{bmatrix}$ のとき, 次の行列を求めよ.

(1) $2A-3B$　　(2)* $3X+2A=B$ を満たす行列 X　　(3)† AC　　(4) $B\,{}^{\mathrm{t}}C\,{}^{\mathrm{t}}A$

4 $A=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 8\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 3 & 2 & 7\end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 4 \\ 2 & 1\end{bmatrix}$ の中から 2 つ選んで, その積を考える.

(1)* 積が 3 次正方行列となるような行列の組み合わせを見つけ, その積を計算せよ. (2 通りある)

(2) 積が正方行列とならないような 2 つの行列の組み合わせと, そのときの積を求めよ.

5 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}$ の正則性, 逆行列について考える.

(1) $(A-aE)(A-dE)$ (E は 2 次単位行列) を計算して, 次の関係式を導け:

$$\boxed{A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O}.$$

(2) $\widetilde{A}:=(a+d)E-A=\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a\end{bmatrix}$ とおくとき, (1) の関係式から, $A\widetilde{A}=\widetilde{A}A=(ad-bc)E$ を導け.

(3) (2) の関係式を用いて, 次の主張を示せ.

① $ad-bc\neq 0$ ならば, A は正則であり, その逆行列は $A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\widetilde{A}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a\end{bmatrix}$.

② $ad-bc=0$ ならば, A は正則でない.

6 2 次正則行列の逆行列の公式を用いて, 次の問いに答えよ.

(1) 次の行列の逆行列を求めよ: ①† $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}$,　② $\begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta\end{bmatrix}$ $(r\neq 0)$.

(2)* $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7\end{bmatrix}$ のとき, $AX={}^{\mathrm{t}}A$ を満たす行列 X を求めよ.

7 行列 A が $A=\begin{bmatrix} A_{11} & O \\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}$ (A_{11} は r 次正方行列, A_{22} は s 次正方行列) と分割されているとする.

(1) $X=\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22}\end{bmatrix}$ が A と同じ形の分割であるとき, 積 AX を分割された形で計算せよ.

(2) A_{11},A_{22} が正則ならば, A も正則となることを示し, A の逆行列を A_{11},A_{21},A_{22} を用いて表せ.

8 行列 $A=\begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 1\end{bmatrix}$ とベクトル $\boldsymbol{p}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{p}_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{p}_3=\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1\end{bmatrix}$ に対して, 以下の問いに答えよ.

(1) $A\boldsymbol{p}_1=\lambda\boldsymbol{p}_1$, $A\boldsymbol{p}_2=\mu\boldsymbol{p}_2$, $A\boldsymbol{p}_3=\boldsymbol{p}_2+\mu\boldsymbol{p}_3$ を満たす実数 λ, μ を求めよ.

(2) 3 次の正方行列 P が $P=\begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3\end{bmatrix}$ と列ベクトル分割した形で与えられているとする. このとき, $AP=PB$ となる 3 次正方行列 B を答えよ.

$\boxed{\text{小テスト題材}}$ (実際の設問形式は異なります)

第 1 問 ($\boxed{1}$ (2))

$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ のとき, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を計算せよ.

第 2 問 ($\boxed{2}$ (1))

空間の 2 点 $\mathrm{A}(1,0,2)$, $\mathrm{B}(2,-3,0)$ に対して, 直線 AB の方程式を求めよ.

第 3 問 ($\boxed{3}$ (3))

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ の積 AC を計算せよ.

第 4 問 ($\boxed{6}$ (1) ①)

$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$ の逆行列を求めよ.

$\boxed{\text{レポート課題}}$ **答だけでなく, 計算の過程も**書いて下さい. (**A４用紙１枚**にまとめて提出)

第 1 問 ($\boxed{2}$ (2))

空間の 3 点 $\mathrm{A}(1,0,2)$, $\mathrm{B}(2,-3,0)$, $\mathrm{C}(-1,2,1)$ を通る平面の方程式を求めよ.
(ヒント: $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ が法線ベクトル)

第 2 問 ($\boxed{3}$ (3))

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ のとき, $3X + 2A = B$ を満たす行列 X を求めよ.

第 3 問 ($\boxed{4}$ (1))

$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ の中から 2 つ選んで, その積を考える.
積が 3 次正方行列となるような行列の組み合わせを見つけ, その積を計算せよ. (2 通りある)

第 4 問 ($\boxed{6}$ (2))

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ のとき, $AX = {}^{\mathrm{t}}A$ を満たす行列 X を求めよ. (2 次正則行列の逆行列の公式を用いる)