数学演習第一（演習第２回）　【解答例】

線形：平面の方程式，行列の演算　2020 年 6 月 3 日

1 (1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 8+2-1 = \boxed{9}$.　　(2) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -1-2 \\ 2+4 \\ 8-2 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}}$.

(3) なす角を $\theta\in[0,\pi]$ とすれば, $\cos\theta = \dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|} = \dfrac{9}{\sqrt{16+1+1}\sqrt{4+4+1}} = \dfrac{9}{3\sqrt{2}\cdot 3} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. よって, $\theta = \boxed{\dfrac{\pi}{4}}$.

(4) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ の作る三角形の面積$) = \dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ の作る平行四辺形の面積$) = \dfrac{1}{2}\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\| = \dfrac{1}{2}\sqrt{9+36+36} = \boxed{\dfrac{9}{2}}$.

(5) $\boldsymbol{b}$ の $\boldsymbol{a}$ 方向の直線への正射影は $\left(\text{図形的に考えれば } (\|\boldsymbol{b}\|\cos\theta)\dfrac{\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|} =\right) \dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a} = \dfrac{9}{18}\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}}$.

(6) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ の作る平行六面体の体積$) = |(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}| = |-3-12+18| = \boxed{3}$.

2 (1) 直線 ℓ は点 $\mathrm{A}(1,0,2)$ を通り, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}$ を方向ベクトルとするから, 方程式は $\boxed{x-1 = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z-2}{-2}}$.

(2) 平面 P は点 $\mathrm{A}(1,0,2)$ を通り, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}$ を法線ベクトルとするから, 方程式は $7(x-1)+5y-4(z-2)=0$. これを整理して, $\boxed{7x+5y-4z+1=0}$.

(3) 直線 OH は原点 O を通り, 平面 P の法線ベクトル $\begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}$ を方向ベクトルとするから, $\mathrm{H}(7t,5t,-4t)$ と書ける. 更に, H は平面 P 上の点であるから, $7\cdot 7t+5\cdot 5t-4\cdot(-4t)+1=0$ を満たす. これを解いて $t=-\dfrac{1}{90}$ となり, H の座標は $\boxed{\left(-\dfrac{7}{90},-\dfrac{1}{18},\dfrac{2}{45}\right)}$ で, 垂線の長さは $\|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\| = \dfrac{\sqrt{49+25+16}}{90} = \boxed{\dfrac{1}{3\sqrt{10}}}$.

【補足】一般に, 点 (x_0,y_0,z_0) から平面 $ax+by+cz+d=0$ に下ろした垂線の長さは $\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ で与えられる. この事実は上と全く同じ考え方で導くことができる.

(4) 点 K は直線 ℓ 上の点であるから, $\mathrm{K}(t+1,-3t,-2t+2)$ と書ける. このとき, $\overrightarrow{\mathrm{CK}} = \begin{bmatrix} t+2 \\ -3t-2 \\ -2t+1 \end{bmatrix}$ と直線 ℓ は垂直ゆえ, $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} t+2 \\ -3t-2 \\ -2t+1 \end{bmatrix} = t+2-3(-3t-2)-2(-2t+1)=0$. これより $t=-\dfrac{3}{7}$ が得られ, 点 K の座標は $\boxed{\left(\dfrac{4}{7},\dfrac{9}{7},\dfrac{20}{7}\right)}$. このとき, $\overrightarrow{\mathrm{CK}} = \dfrac{1}{7}\begin{bmatrix} 11 \\ -5 \\ 13 \end{bmatrix}$ であるから, 垂線の長さは $\|\overrightarrow{\mathrm{CK}}\| = \dfrac{\sqrt{121+25+169}}{7} = \boxed{\dfrac{3\sqrt{35}}{7}}$.

3 (1) $2A-3B = \boxed{\begin{bmatrix} 10 & -4 \\ -5 & -9 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}}$.　　(2) $X = \dfrac{1}{3}(B-2A) = \dfrac{1}{3}\left\{\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\right\} = \boxed{\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$.

(3) $AC = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}}$.

(4) $B\,{}^{\mathrm{t}}C\,{}^{\mathrm{t}}A = B\,{}^{\mathrm{t}}(AC) = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 2 & 6 & -20 \\ 7 & 1 & -10 \\ 4 & -3 & 5 \end{bmatrix}}$.

4 $A: 1\times 3$ 行列, $B: 3\times 1$ 行列, $C: 2\times 3$ 行列, $D: 3\times 2$ 行列 であることに注意.

(1) 積が 3 次正方行列となるのは次の 2 通り:

$$BA = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 3 & 12 & 24 \\ 5 & 20 & 40 \\ 2 & 8 & 16 \end{bmatrix}},\quad DC = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 3 & 2 & 7 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 21 & 24 & 66 \\ 17 & 28 & 68 \\ 5 & 10 & 23 \end{bmatrix}}.$$

(2) 積が正方行列とならないのは次の 2 通り:

$$AD = \begin{bmatrix}1 & 4 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 6\\ 5 & 4\\ 2 & 1\end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix}39 & 30\end{bmatrix}}, \quad CB = \begin{bmatrix}1 & 4 & 8\\ 3 & 2 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ 5\\ 2\end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix}39\\ 33\end{bmatrix}}.$$

5 (1) $(A-aE)(A-dE) = \begin{bmatrix}0 & b\\ c & d-a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a-d & b\\ c & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}bc & 0\\ 0 & bc\end{bmatrix} = bcE$. 左辺を展開すれば $A^2-(a+d)A+adE$ であるから, 確かに $A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$ が成り立つ.

(2) (1) の関係式より, $(ad-bc)E = (a+d)A - A^2 = A((a+d)E-A) = ((a+d)E-A)A$. よって, $\widetilde{A} = (a+d)E - A = \begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$ とおけば, 確かに $A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = (ad-bc)E$ が成り立つ.

(3) ① $ad-bc \neq 0$ ならば, (2) の関係式の両辺を $ad-bc\neq 0$ で割り, $A\left(\dfrac{1}{ad-bc}\widetilde{A}\right) = \left(\dfrac{1}{ad-bc}\widetilde{A}\right)A = E$. 定義により $\dfrac{1}{ad-bc}\widetilde{A}$ は A の逆行列である (A は正則): $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\widetilde{A} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$.

② $ad-bc=0$ ならば $A\widetilde{A}=O$ となるが, このとき A が逆行列 A^{-1} をもつ (= 正則) と仮定すれば, $\widetilde{A} = (A^{-1}A)\widetilde{A} = A^{-1}(A\widetilde{A}) = A^{-1}O = O$ となり, $A=O$ が従う (成分に注目). ところが, $A=O$ はどんな 2 次正方行列を掛けても O となるので, A が逆行列をもつという仮定に矛盾する.

6 (1) 2 次正則行列の逆行列の公式を用いて, ① $\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}^{-1} = \boxed{\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}}$,

② $\begin{bmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{r}\begin{bmatrix}r\cos\theta & r\sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\frac{\sin\theta}{r} & \frac{\cos\theta}{r}\end{bmatrix}}$.

(2) $AX = {}^{\mathrm{t}}A$ の両辺の左側から A^{-1} を掛けて,

$$X = A^{-1}\,{}^{\mathrm{t}}A = \begin{bmatrix}2 & 3\\ 5 & 7\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}2 & 5\\ 3 & 7\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}7 & -3\\ -5 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 5\\ 3 & 7\end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix}-5 & -14\\ 4 & 11\end{bmatrix}}.$$

7 (1) $A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} r & s\end{array}\\ \begin{array}{c} r\\ s\end{array} & \begin{bmatrix}A_{11} & O\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}\end{array}$, $X = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} r & s\end{array}\\ \begin{array}{c} r\\ s\end{array} & \begin{bmatrix}X_{11} & X_{12}\\ X_{21} & X_{22}\end{bmatrix}\end{array}$ と分割されているから,

$$AX = \begin{bmatrix}A_{11} & O\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_{11} & X_{12}\\ X_{21} & X_{22}\end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix}A_{11}X_{11} & A_{11}X_{12}\\ A_{21}X_{11}+A_{22}X_{21} & A_{21}X_{12}+A_{22}X_{22}\end{bmatrix}}.$$

(2) $AX=E$ だとすれば, $A_{11}X_{11}=E_r$, $A_{11}X_{12}=O$, $A_{21}X_{11}+A_{22}X_{21}=O$, $A_{21}X_{12}+A_{22}X_{22}=E_s$. ここで, A_{11}, A_{22} が正則であるから, $X_{11}=A_{11}^{-1}$, $X_{12}=O$, $X_{21}=-A_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}$, $X_{22}=A_{22}^{-1}$. このとき, $XA=E$ が成り立つことも容易に確かめられる. よって, A は正則であり, その逆行列は $A^{-1} = \boxed{\begin{bmatrix}A_{11}^{-1} & O\\ -A_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & A_{22}^{-1}\end{bmatrix}}$.

8 (1) $A\boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix}-1\\ 0\\ -1\end{bmatrix} = -\boldsymbol{p}_1$, $A\boldsymbol{p}_2 = \begin{bmatrix}2\\ 2\\ 2\end{bmatrix} = 2\boldsymbol{p}_2$, $A\boldsymbol{p}_3 = \begin{bmatrix}5\\ 5\\ 3\end{bmatrix} = \boldsymbol{p}_2 + 2\boldsymbol{p}_3$ より, $\lambda = \boxed{-1}$, $\mu = \boxed{2}$.

(2) (1) の結果を用いて,

$$\begin{aligned}AP &= A\begin{bmatrix}\boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A\boldsymbol{p}_1 & A\boldsymbol{p}_2 & A\boldsymbol{p}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\boldsymbol{p}_1 & 2\boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_2+2\boldsymbol{p}_3\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix} = P\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\end{aligned}$$

であるから, B として $\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$ がとれる. (実は, P は正則であり, $B = P^{-1}AP$ が成り立つ.)