数学演習第一（演習 第3回） 微積：合成関数の微分, 逆関数の微分等

2020 年 6 月 10 日 実施

- 小テスト の問題，レポート課題 はそれぞれ２枚目，３枚目にあります．
- ３枚目に「関数の定義域に関する注意」がありますので，最初に目を通して下さい．

1 次の関数の導関数を求めよ．(a は $0 < a \neq 1$ なる定数)

(1) $f(x) = a^{x^2+2x}$ [3.1.6 (2)]　(2) $f(x) = \log\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

(3) $f(x) = \sqrt{x + 2\sqrt{x}}$ [3.1.2 (3)]　(4) $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{(x-2)^3(x+3)^4}$ [3.1.2 (5)]

(5) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x^2+1}{(x-1)^3}}$ [3.1.2 (6)]　(6) $f(x) = (\cos x)^{\sin x}$ [3.1.5 (2) 改]

(7) $f(x) = x^{\log x}$ [3.1.6 (3)]　(8) $f(x) = x^{x^{\log x}}$

2 関数 f の逆関数 f^{-1} が存在し, ともに微分可能であるとする (成立条件については微積教科書 p.29 参照)．このとき, $y = f^{-1}(x)$ とおけば, $x = f(y)\ \big(= f(f^{-1}(x))\big)$ であるから, 両辺を x で微分して $1 = f'(y)\{f^{-1}(x)\}'$ (合成関数の微分)．よって, $y = f^{-1}(x)$ の導関数が

$$\{f^{-1}(x)\}' = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \qquad \left(\text{あるいは } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}\right)$$

で与えられる．この考え方 (公式) により, 次の逆三角関数の導関数を計算せよ．

(1) $\mathrm{Sin}^{-1}\,x$　(2) $\mathrm{Cos}^{-1}\,x$　(3) $\mathrm{Tan}^{-1}\,x$

3 次の関数の導関数を求めよ．

(1) $f(x) = \mathrm{Sin}^{-1}(x^2)$ [3.1.4 (3)]　(2) $f(x) = \mathrm{Sin}^{-1}\sqrt{1-x}$ [3.1.4 (4) 改]

(3) $f(x) = \dfrac{\mathrm{Tan}^{-1}\,x}{1+x^2}$ [3.1.4 (1)]　(4) $f(x) = \mathrm{Cos}^{-1}(\sin x)$

(5) $f(x) = \mathrm{Tan}^{-1}\,x + \mathrm{Tan}^{-1}(1/x)$

4 双曲線関数を次のように定義する．

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

(1) 演習第 1 回（5/27 出題）の $\boxed{6}$ (2) で，関数 $y = \sinh x$ を x について解くと,

$$x = \log(y + \sqrt{y^2+1})$$

であった．これを y で微分することにより，逆関数の微分 $\dfrac{dx}{dy}$ を計算せよ．

(2) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ と $(\sinh x)' = \cosh x$ の関係を用いて，$y = \sinh x$ を x で微分して $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．「逆関数の微分」は「微分の逆数」(5/20 出題「高校の復習 2」の $\boxed{3}$ (1)) だったから，逆数を取ることで $y = \sinh x$ の逆関数の微分 $\dfrac{dx}{dy}$ を y で表せ．

小テスト

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \left(= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right)$$

とする．

以下の文章の空欄 [**Q1**]〜[**Q4**] に当てはまる数式を，選択肢 (ア)〜(エ) から選べ．

(1) 5/27 出題「演習第 1 回」の $\boxed{6}$ (2) で，関数 $y = \tanh x$ を x について解くと，

$$x = \frac{1}{2} \log \frac{1+y}{1-y}$$

であった．これを y で微分することにより，逆関数の微分 $\dfrac{dx}{dy}$ は

$$\frac{dx}{dy} = [\mathrm{Q}\mathbf{1}]$$

Q1： (ア) $\dfrac{1}{1+y^2}$ (イ) $\dfrac{y}{1+y^2}$ (ウ) $\dfrac{1}{1-y^2}$ (エ) $\dfrac{y}{1-y^2}$

(2) 関数 $\tanh x$ を x で微分する，商の微分法を使い，分子に関係式

$$(\sinh x)' = \cosh x, \quad (\cosh x)' = \sinh x, \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

を使って $(\tanh x)'$ を $\cosh x$ で表すと，

$$(\tanh x)' = [\mathrm{Q}\mathbf{2}]$$

Q2： (ア) $\cosh^2 x$ (イ) $\cosh x$ (ウ) $\dfrac{1}{\cosh x}$ (エ) $\dfrac{1}{\cosh^2 x}$

一方，$\tanh x$ と $\cosh x$ の間には，関係式 $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ から得られる

$$[\mathrm{Q}\mathbf{3}]$$

Q3： (ア) $1 + \tanh^2 x = \cosh^2 x$ (イ) $1 - \tanh^2 x = \cosh^2 x$
(ウ) $1 + \tanh^2 x = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$ (エ) $1 - \tanh^2 x = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$

という関係がある．これを用いて, $(\tanh x)'$ を $\tanh x$ で表すと,

$$(\tanh x)' = [\mathrm{Q}\mathbf{4}]$$

Q4： (ア) $1 + \tanh^2 x$ (イ) $1 - \tanh^2 x$ (ウ) $1 + \dfrac{1}{\tanh^2 x}$ (エ) $1 - \dfrac{1}{\tanh^2 x}$

これより $y = \tanh x$ の逆関数を y で微分したものを y で表すと,

$$\frac{dx}{dy} = [\mathrm{Q1}]$$

となる．

$\boxed{\text{レポート課題}}$

次の関数の導関数を求めよ．レポートには計算結果だけでなく，結果に至る途中経過も示せ．

(1) $f(x) = \log(\sqrt{x-a} + \sqrt{x-b}\,)$ (ただし $x > \max(a,b)$)

(2) $f(x) = \log(\sin(e^x))$

(3) $f(x) = \mathrm{Sin}^{-1}\sqrt{\dfrac{x+1}{2}}$

(4) $f(x) = \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

関数の定義域に関する注意 （定義域が $\mathbb{R}$ の部分集合の場合）

- 特に指定のない限り，定義域は許される最も広い範囲で考える．定義域の内部で微分可能でもしばしば端点で微分可能性が失われる．例えば，$\mathrm{Sin}^{-1}\,x$ は $-1 \leq x \leq 1$ で定義され，$-1 < x < 1$ で微分可能．
- $f(x), p(x)$ が連続関数で，$p(x)$ が '有理数の値をとる定数関数' 以外のとき，関数 $f(x)^{p(x)}$ は，通常，底 $f(x) > 0$ の範囲で考え，$f(x)^{p(x)} = e^{p(x)\log f(x)}$ となる ($p(x)$ が正値なら極限をとって $f(x) \geq 0$ の範囲で考えることもできる)．例えば，$(\sin x)^{\cos x}$ の定義域は $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (2n\pi, (2n+1)\pi)$ となる．
- $f(x)^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{f(x)}\,)^m$ ($m, n \in \mathbb{N}$ は互いに素) の定義域は，n が奇数のとき $f(x)$ の定義域と一致し，n が偶数のとき $f(x) \geq 0$ の範囲となる．($f(x)^{-\frac{m}{n}}$ であれば更に $f(x) \neq 0$ が制限として加わる．)