数学演習第一（演習 第 3 回） 微積：合成関数の微分, 逆関数の微分等

2020 年 6 月 10 日 実施

$\boxed{1}$ (1) 合成関数の微分法により,

$$f'(x) = a^{x^2+2x} \log a \cdot (x^2+2x)' = 2(x+1)a^{x^2+2x} \log a.$$

(2) このままの形で微分してもよいが, 対数の性質を利用して $f(x) = \frac{1}{2}\{\log(1-\cos x) - \log(1+\cos x)\}$ と変形してから微分する:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin x}{1-\cos x} - \frac{-\sin x}{1+\cos x}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sin x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin x}.$$

あるいは, 先に $f(x) = \log\sqrt{\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}} = \log\left|\tan\dfrac{x}{2}\right|$ と変形して, $f'(x) = \dfrac{1}{\tan\frac{x}{2}}\dfrac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{\sin x}$.

(3) $(\sqrt{x}\,)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ と合成関数の微分法により,

$$f'(x) = \frac{(x+2\sqrt{x}\,)'}{2\sqrt{x+2\sqrt{x}}} = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+2\sqrt{x}}} = \frac{1+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{x+2\sqrt{x}}}.$$

(4) $\log|f(x)| = 2\log|x+1| - 3\log|x-2| - 4\log|x+3|$ の両辺を x で微分すると,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2}{x+1} - \frac{3}{x-2} - \frac{4}{x+3} = -\frac{5x^2+6x+13}{(x+1)(x-2)(x+3)}.$$

$$\therefore\ f'(x) = \frac{(x+1)^2}{(x-2)^3(x+3)^4} \cdot \frac{-(5x^2+6x+13)}{(x+1)(x-2)(x+3)} = -\frac{(x+1)(5x^2+6x+13)}{(x-2)^4(x+3)^5}.$$

【注】 対数微分法を適用する際に, 理論的には, (分母の零点とともに) 分子の零点 $x=-1$ が定義域から外れるが, 計算結果 (上式右辺の有理式) をもとの有理式の導関数と見るならば $x=-1$ でも有効である. 実際, 商の微分公式から, 有理式は分母の零点以外で (計算しなくても) 連続な導関数をもつことが分かっている.

(5) $\log|f(x)| = \dfrac{1}{3}\log(x^2+1) - \log|x-1|$ の両辺を x で微分すると,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x-1} = \frac{-(x^2+2x+3)}{3(x-1)(x^2+1)}.$$

$$\therefore\ f'(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2+1}{(x-1)^3}} \cdot \frac{-(x^2+2x+3)}{3(x-1)(x^2+1)} = -\frac{x^2+2x+3}{3(x-1)^2(x^2+1)^{2/3}}.$$

(6) $\log f(x) = \sin x \cdot \log(\cos x)$ の両辺を x で微分すると,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \cos x \cdot \log(\cos x) + \sin x \cdot \frac{-\sin x}{\cos x} = \cos x\,\{\log(\cos x) - \tan^2 x\}.$$

$$\therefore\ f'(x) = (\cos x)^{1+\sin x}\{\log(\cos x) - \tan^2 x\}$$

(7) $\log f(x) = (\log x)(\log x) = (\log x)^2$ の両辺を x で微分すると,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 2\log x \cdot \frac{1}{x} = \frac{2\log x}{x}. \qquad \therefore\ f'(x) = f(x) \cdot \frac{2\log x}{x} = 2x^{\log x - 1}\log x.$$

(8) $\log f(x) = x^{\log x}\log x$ の両辺を x で微分すると, (7) より

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = (x^{\log x})'\log x + x^{\log x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x^{\log x}\{2(\log x)^2+1\}}{x} = x^{\log x - 1}\{2(\log x)^2+1\}.$$

$$\therefore\ f'(x) = x^{x^{\log x}} \cdot x^{\log x - 1}\{2(\log x)^2+1\} = x^{x^{\log x}+\log x - 1}\{2(\log x)^2+1\}.$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $y = \mathrm{Sin}^{-1}\, x$ とおけば，$x = \sin y \ \left(-\dfrac{\pi}{2} \le y \le \dfrac{\pi}{2}\right)$，$\dfrac{dx}{dy} = \cos y = \sqrt{1-x^2}$ より，$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(2) $y = \mathrm{Cos}^{-1}\, x$ とおけば，$x = \cos y \ (0 \le y \le \pi)$，$\dfrac{dx}{dy} = -\sin y = -\sqrt{1-x^2}$ より，$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(3) $y = \mathrm{Tan}^{-1}\, x$ とおけば，$x = \tan y \ \left(-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}\right)$，$\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\cos^2 y} = 1 + x^2$ より，$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1+x^2}$.

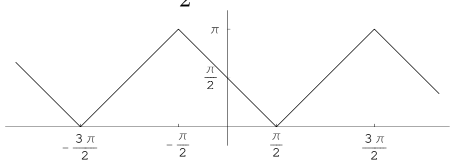
$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}} \cdot (x^2)' = \dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$.

(2) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-(1-x)}} \cdot \dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}} = -\dfrac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$.

(3) $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{1+x^2} \cdot (1+x^2) - \mathrm{Tan}^{-1}\, x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1 - 2x\ \mathrm{Tan}^{-1}\, x}{(1+x^2)^2}$.

(4) $f'(x) = -\dfrac{(\sin x)'}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = -\dfrac{\cos x}{|\cos x|} \ \left(= \begin{cases} -1 & (\cos x > 0) \\ 1 & (\cos x < 0) \end{cases}\right)$.

《注》上の事実と $\mathrm{Cos}^{-1}(\sin n\pi) = \mathrm{Cos}^{-1}\, 0 = \dfrac{\pi}{2}$ $(n \in \mathbb{Z})$ より, $y = \mathrm{Cos}^{-1}(\sin x)$ のグラフは次の通り.



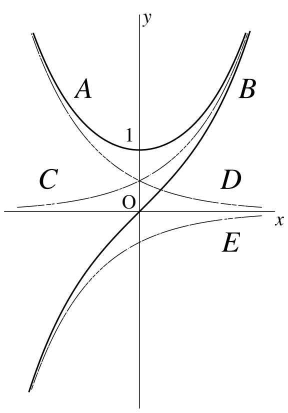
(5) $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{-1/x^2}{1+(1/x)^2} = 0.$

《注》$\mathrm{Tan}^{-1}(\pm 1) = \pm\dfrac{\pi}{4}$ であるから上と合わせて, $f(x) = \pm\dfrac{\pi}{2}$ $(x \gtreqless 0)$ (複号同順).

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$ により $x = \log(y + \sqrt{1+y^2})$ と具体的な形を求めることができた (演習第 1 回). よって, その導関数は

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y + \sqrt{1+y^2}}\left(1 + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.$$

(2) $\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} \sinh x = \pm\infty$ (複号同順) と中間値の定理により, $y = \sinh x$ の値域は $\mathbb{R}$ 全体. また, $\dfrac{dy}{dx} = \cosh x = \sqrt{1 + \sinh^2 x} = \sqrt{1+y^2}$ である. $\dfrac{dy}{dx} > 0$ と $y = \sinh x$ の全射性により, $y = \sinh x$ の逆関数は $\mathbb{R}$ 全体で定義される. その導関数は $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}$.



$A : y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\quad B : y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$,

$C : y = \dfrac{e^x}{2}$, $\quad D : y = \dfrac{e^{-x}}{2}$, $\quad E : y = \dfrac{-e^{-x}}{2}$

小テスト (1) $\tanh x = 1 - \dfrac{2}{e^{2x}+1}$ より, $e^{2x} > 0$ なので, $y = \tanh x$ を満たす $x \in \mathbb{R}$ が存在するための条件は $-1 < y < 1$ であり, このとき $x = \dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right)$ $\left(= \log\sqrt{\dfrac{1+y}{1-y}}\right)$ である (演習第 1 回). よって, $x = \mathrm{Tanh}^{-1}\, y = \dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right)$ の導関数は

$$\frac{d}{dy}\,\mathrm{Tanh}^{-1}\, y = \frac{1}{2}\frac{d}{dy}\{\log(1+y) - \log(1-y)\} = \frac{1}{1-y^2} \quad (-1 < y < 1) \qquad [\mathrm{Q}\mathbf{1}\text{ の答：(ウ)}]$$

(2) $\mathrm{Tanh}^{-1}\, y$ の具体的な形を用いずに, 逆三角関数の場合と同様の方法で, 導関数を計算する.
このとき,

$$(\tanh x)' = \left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)' = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} \qquad [\mathrm{Q}\mathbf{2}\text{ の答：(エ)}]$$

また，$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ の両辺を $\cosh^2 x$ で割れば,

$$1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x} \qquad [\mathrm{Q}\mathbf{3}\text{ の答：(エ)}]$$

なので，これらを合わせて

$$(\tanh x)' = 1 - \tanh^2 x \qquad [\mathrm{Q}\mathbf{4}\text{ の答：(イ)}]$$

すなわち，$y = \tanh x$ のとき，$\dfrac{dy}{dx} = 1 - y^2$ だから，逆関数 $x = \mathrm{Tanh}^{-1}\, y$ の微分は

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{1-y^2}$$

となり，(1) と同じ結果を得る.

レポート課題 (1) $f(x) = \log(\sqrt{x-a} + \sqrt{x-b}\,)$ より,

$$f'(x) = \frac{(\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}\,)'}{\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}} = \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x-a}} + \dfrac{1}{2\sqrt{x-b}}}{\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}} = \frac{1}{2\sqrt{x-a}\sqrt{x-b}}$$

(2) $f(x) = \log(\sin(e^x))$ より, $f'(x) = \dfrac{(\sin(e^x))'}{\sin(e^x)} = \dfrac{e^x\cos(e^x)}{\sin(e^x)}$

(3) $f(x) = \mathrm{Sin}^{-1}\sqrt{\dfrac{x+1}{2}}$ より, $f'(x) = \dfrac{\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{2}}\right)'}{\sqrt{1-\dfrac{x+1}{2}}} = \dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$

(注) この結果は, $\left(\dfrac{1}{2}\,\mathrm{Sin}^{-1}\, x\right)'$ である．理由を考察してみよう.

(4) $f(x) = \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ より,

$$f'(x) = \frac{\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)'}{1+\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)^2} = \frac{\dfrac{4}{(e^x+e^{-x})^2}}{1+\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)^2} = \frac{4}{(e^x+e^{-x})^2+(e^x-e^{-x})^2} = \frac{2}{e^{2x}+e^{-2x}}$$

(注) $f(x) = \mathrm{Tan}^{-1}(\tanh x)$ と見れば,

$$f'(x) = \frac{(\tanh x)'}{1+(\tanh x)^2} = \frac{1-\tanh^2 x}{1+\tanh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x + \sinh^2 x} = \frac{1}{\cosh 2x}$$