数学演習第一（演習第４回）

線形：行列の基本変形, 簡約行列, 行列の階数　　2020 年 6 月 17 日

- $\boxed{\textbf{小テスト}}$の問題（題材）は † の付いた４問です．($\boxed{1}$(1)，$\boxed{1}$(3)，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$(1))
- $\boxed{\textbf{レポート課題}}$の問題は * の付いた２問です．($\boxed{3}$(4)，$\boxed{5}$(1))
  どちらも**３枚目**にまとめて書いてあります．

要点

(1) 行列 A の行ベクトル分割を $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m \end{bmatrix}$ とする．A が次の４条件をみたすとき**簡約行列**とよぶ．

（ただし，ここでは非零行ベクトル $\boldsymbol{a}_i$ の一番左にある 0 でない成分を $\boldsymbol{a}_i$ **の主成分**とよぶ.）

(i) $\boldsymbol{a}_i$ のうち零ベクトル $\mathbf{0}$ があれば，それらは下に集まっている．

(ii) $\boldsymbol{a}_i \neq \mathbf{0}$ なら $\boldsymbol{a}_i$ の主成分は 1 である．

(iii) 各行の主成分は下の行ほど右にある．

(iv) 主成分を含む列の主成分以外の成分はすべて 0 である．

(2) 行列に対する以下の３種類の操作を**行基本変形**という．

(R1) 第 i 行を c 倍する（ただし $c \neq 0$)．この操作を $c \times ⓘ$ と書く．

(R2) 第 i 行と第 j 行を入れ換える．この操作を $ⓘ \leftrightarrow ⓙ$ と書く．

(R3) 第 i 行に第 j 行の c 倍をたす．この操作を $ⓘ + c \times ⓙ$ と書く．

(3) 任意の行列 A に対して,

- A は有限回の行基本変形によって簡約行列に変形することができる．
- 得られる簡約行列は，行基本変形のやりかたによらず A から一意的に決まる．
- A を簡約行列に変形したときの主成分の個数を A の**階数**といい，$\mathrm{rank}\,A$ で表す．
- A が $m \times n$ 行列ならば $\mathrm{rank}\,A \leq m$ かつ $\mathrm{rank}\,A \leq n$ が成り立つ．

[例題] 行列 $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 16 \\ -1 & 1 & 10 \end{bmatrix}$ を何回かの行基本変形で簡約行列に変形せよ．

[解] $$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 16 \\ -1 & 1 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{①\leftrightarrow②} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 10 \\ 0 & 2 & 16 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}\times②]{(-1)\times①} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -10 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{①+1\times②} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{1}$ 次の行列が簡約行列ではない理由として，要点 (1) の (i)〜(iv) のどれに反するかを全て選んで答えよ．さらに, 何回かの行基本変形で簡約行列に変形せよ．

(1)† $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$　　(2) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$　　(3)† $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$　　(4) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

$\boxed{2}$† 下の行列の簡約化について, 空欄を埋めよ (記法は要点 (2) に従うこと).

$$\begin{bmatrix} 7 & 7 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\boxed{}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 7 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow[\boxed{}]{\boxed{}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \square & \square \\ 0 & \square & \square \end{bmatrix} \xrightarrow[\boxed{}]{\boxed{}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\boxed{}]{\boxed{}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \square \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\boxed{3}$ 次の行列を何回かの行基本変形で簡約行列に変形し, 階数を求めよ.

(1)† $\begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ -2 & 4 & -6 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 & 15 \\ 2 & 4 & 3 & 12 \\ 1 & 2 & 3 & 9 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 3 & 16 \\ 5 & 1 & 1 & 7 & 11 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -9 \end{bmatrix}$ (4)* $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 9 \\ 2 & 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

$\boxed{4}$ 行列 A に行基本変形を (何回か) 施した結果が B となるとき, $MA = B$ を満たす行列 M が存在する (教科書 pp. 43–46 参照). 以下の「行基本変形 (の繰り返し)」について M に相当する行列を記せ.

[例] 2×2 行列に対して,「第 1 行を 3 倍し, 次に第 2 行を -2 倍する」

[解] 基本行列は 2×2 型, $A \xrightarrow[②\times(-2)]{①\times 3} B$ なので, $B = P_2(-2)P_1(3)A$. 従って, $M = P_2(-2)P_1(3) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$. 但し, $P_1(-2)$ 等は, 基本行列を表す記号 (教科書 p. 43).

(1) 3×2 行列に対して, 「第 1 行に第 2 行の -5 倍を加える」

(2) 3×4 行列に対して, 「第 3 行を 2 倍し, 次に第 1 行と第 3 行を入れ換える」

(3) 4×3 行列に対して, 「第 2 行に第 4 行の 5 倍を加え, 次に第 2 行に第 1 行の 2 倍を加え, 更に第 1 行と第 4 行を入れ換え, 最後に第 3 行に第 2 行の -3 倍を加える」

$\boxed{5}$ 次の行列の階数を求めよ.

(1)* $\begin{bmatrix} a & a & a \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & a \\ -1 & 0 & b \\ -a & -b & 0 \end{bmatrix}$

（ヒント：a, b, c の値によって階数は変わり得るので，場合分けが必要.）

小テスト問題

第１問 ($\boxed{1}$(1))

行列 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ が簡約行列でない理由として，以下の (i)〜(iv) のどれに反するかを全て選んで答えよ.

（ただし，ここでは非零行ベクトル $\boldsymbol{a}_i$ の一番左にある 0 でない成分を $\boldsymbol{a}_i$ **の主成分**とよぶ.）

(i) $\boldsymbol{a}_i$ のうち零ベクトル $\mathbf{0}$ があれば，それらは下に集まっている.

(ii) $\boldsymbol{a}_i \neq \mathbf{0}$ なら $\boldsymbol{a}_i$ の主成分は 1 である.

(iii) 各行の主成分は下の行ほど右にある.

(iv) 主成分を含む列の主成分以外の成分はすべて 0 である.

第２問 ($\boxed{1}$(3))

行列 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ が簡約行列でない理由として，以下の (i)〜(iv) のどれに反するかを全て選んで答えよ.

（ただし，ここでは非零行ベクトル $\boldsymbol{a}_i$ の一番左にある 0 でない成分を $\boldsymbol{a}_i$ **の主成分**とよぶ.）

(i) $\boldsymbol{a}_i$ のうち零ベクトル $\mathbf{0}$ があれば，それらは下に集まっている.

(ii) $\boldsymbol{a}_i \neq \mathbf{0}$ なら $\boldsymbol{a}_i$ の主成分は 1 である.

(iii) 各行の主成分は下の行ほど右にある.

(iv) 主成分を含む列の主成分以外の成分はすべて 0 である.

第３問 ($\boxed{2}$)

下の行列の簡約化について, 空欄となっている５つの成分の和を求めよ.

$$\begin{bmatrix} 7 & 7 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\boxed{}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 7 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow[\boxed{}]{\boxed{}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \square & \square \\ 0 & \square & \square \end{bmatrix} \xrightarrow[\boxed{}]{\boxed{}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\boxed{}]{\boxed{}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \square \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

第４問 ($\boxed{3}$(1))

行列 $\begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ -2 & 4 & -6 \end{bmatrix}$ の階数を求めよ.

レポート課題 **答だけでなく，計算の過程も**書いて下さい.（**A4 用紙１枚**にまとめて提出）

第１問 ($\boxed{3}$(4))

行列 $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 9 \\ 2 & 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ を何回かの行基本変形で簡約行列に変形し, 階数を求めよ.

第２問 ($\boxed{5}$(1))

行列 $\begin{bmatrix} a & a & a \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$ を何回かの行基本変形で簡約行列に変形し, 階数を求めよ.

（ヒント：a の値によって階数は異なるため，場合分けが必要.）