演習 第 4 回　線形：行列の基本変形, 簡約行列, 行列の階数

2020 年 6 月 17 日

$\boxed{1}$ (1) 第 1 行の主成分が 1 でないので (ii) に反する．また，第 2 行の主成分が第 1 行の主成分より左にあるので (iii) に反する．$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-1)\times①} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{①\leftrightarrow②} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(2) 第 1 行と第 2 行の主成分が 1 でないので (ii) に反する．$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}\times②]{\frac{1}{2}\times①} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 5/2 \end{bmatrix}$.

(3) 第 2 行は零ベクトルであるが, 第 3 行は非零ベクトルであるため (i) に反する．また, 第 3 行の主成分が第 2 列にあるが, 第 2 列には他にも 0 でない成分があるため (iv) に反する．

$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{②\leftrightarrow③} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{①+2\times②} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(4) 第 1 行と第 3 行の主成分が 1 でないので (ii) に反する．また，第 2 行, 第 3 行の主成分がそれぞれ第 2 列, 第 3 列にあるが, 第 2 列, 第 3 列には他にも 0 でない成分があるため (iv) に反する．

$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{5}\times③]{\frac{1}{2}\times①} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[①+3\times③]{①-2\times②} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$\boxed{2}$ $\begin{bmatrix} 7 & 7 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{①\leftrightarrow③} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 7 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow[③-7\times①]{②-6\times①} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -14 \\ 0 & -7 & -14 \end{bmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{7}\times③]{-\frac{1}{7}\times②} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[③-②]{①-2\times②} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$\boxed{3}$ 簡約行列の主成分を枠で囲んで示しておく．簡約行列の主成分の個数がもとの行列の階数である．スペースの関係で省略するが, これ以外の手順もあり得る．

(1) $\begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ -2 & 4 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{2}\times②]{\frac{1}{3}\times①} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{②-①} \begin{bmatrix} \boxed{1} & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

階数は 1.

(2) $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 & 15 \\ 2 & 4 & 3 & 12 \\ 1 & 2 & 3 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}\times①} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 12 \\ 1 & 2 & 3 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[③-①]{②-2\times①} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[③-2\times②]{①-②} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

階数は 2.

(3) $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 3 & 16 \\ 5 & 1 & 1 & 7 & 11 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow{-1\times①} \begin{bmatrix} -4 & -3 & -1 & -3 & -16 \\ 5 & 1 & 1 & 7 & 11 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow{①+②} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 & -5 \\ 5 & 1 & 1 & 7 & 11 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow[③-①]{②-5\times①}$

$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 11 & 1 & -13 & 36 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{③-②} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 11 & 1 & -13 & 36 \\ 0 & -10 & 0 & 10 & -40 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{10}\times③} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 11 & 1 & -13 & 36 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{②\leftrightarrow③}$

$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 11 & 1 & -13 & 36 \end{bmatrix} \xrightarrow[③-11\times②]{①+2\times②} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & -8 \end{bmatrix}$.　階数は 3.

(4) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 9 \\ 2 & 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[④+2\times①]{③+3\times①} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[②\leftrightarrow③]{(-1)\times①} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{④-②} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow[\substack{②-③ \\ ④+③}]{①+③} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.　階数は 3.

$\boxed{4}$ (1) 基本行列は 3×3 行列. $A \xrightarrow{①+(-5)\times②} B$ なので, $B = P_{12}(-5)A$. 従って, $M = P_{12}(-5) = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(2) 基本行列は 3×3 行列. $A \xrightarrow{2\times③} \bullet \xrightarrow{①\leftrightarrow③} B$ なので, $B = P_{13}P_3(2)A$. 従って,

$$M = P_{13}P_3(2) = P_{13}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

積を「計算」する必要はなく, P_{13} に対応する行基本変形を施せばよいことに注意.

(3) 基本行列は 4×4 行列. $A \xrightarrow{②+5\times④} \bullet \xrightarrow{②+2\times①} \bullet \xrightarrow{①\leftrightarrow④} \bullet \xrightarrow{③+(-3)\times②} B$ なので,
$B = P_{32}(-3)P_{14}P_{21}(2)P_{24}(5)A$. 従って,

$$M = P_{32}(-3)P_{14}P_{21}(2)P_{24}(5) = P_{32}(-3)P_{14}P_{21}(2)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= P_{32}(-3)P_{14}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = P_{32}(-3)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ -6 & -3 & 1 & -15 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{5}$ 階数が判った時点で計算を終了してもよい (簡約行列まで求める必要はない).

(1) $\begin{bmatrix} a & a & a \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix} \xrightarrow{①\leftrightarrow③} \begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & a \\ a & a & a \end{bmatrix} \xrightarrow[③-a\times①]{②-①} \begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-a^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & -a(a-1) \end{bmatrix}$ より,

$$\begin{cases} a = 1 & \Rightarrow \quad \text{階数は } 1, \\ a = 0 & \Rightarrow \quad \text{階数は } 2, \\ a \neq 1 \text{ かつ } a \neq 0 & \Rightarrow \quad \text{階数は } 3. \end{cases}$$

(2) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix} \xrightarrow[③-a^2\times①]{②-a\times①} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & (b-a)(b+a) & (c-a)(c+a) \end{bmatrix}$.

- $a = b$ のとき, $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & c-a \\ 0 & 0 & (c-a)(c+a) \end{bmatrix}$. 従って, $c = a$ ならば $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, 階数は 1 である.
  一方, $c \neq a$ ならば $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & c-a \\ 0 & 0 & (c-a)(c+a) \end{bmatrix} \xrightarrow{③-(c+a)\times②} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & c-a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, 階数は 2 である.
- $a \neq b$ のとき, $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & (b-a)(b+a) & (c-a)(c+a) \end{bmatrix} \xrightarrow{③-(b+a)\times②} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & 0 & (c-a)(c-b) \end{bmatrix}$
  より, $b = c$ または $c = a$ ならば階数は 2 であり, $b \neq c$ かつ $c \neq a$ ならば階数は 3 である.

以上より, a, b, c が全て一致するならば階数は 1, いずれか二つが一致し, もう一つが異なるならば階数は 2, 全て異なれば階数は 3 となる.

(3) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & a \\ -1 & 0 & b \\ -a & -b & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{①\leftrightarrow②} \begin{bmatrix} -1 & 0 & b \\ 0 & 1 & a \\ -a & -b & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{③-a\times①} \begin{bmatrix} -1 & 0 & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & -b & -ab \end{bmatrix} \xrightarrow[③+b\times②]{(-1)\times①} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より,
(a, b の値によらず) 階数は 2 である.