

数学演習第一 (演習 第5回)

微積：極値、関数の増減、ロピタルの定理

2020年6月24日 実施

- **小テスト** の問題, **レポート課題** は二枚目にまとめてあります.
(以下の問題で, 小テスト, レポート課題に関する問題をそれぞれ †, * で示してあります.)

1 次の関数の増減を調べ, 極値を求めよ.

$$(1)^\dagger f(x) = \frac{1}{2x} + \text{Tan}^{-1} \frac{x}{2} \quad (2)^* f(x) = x^{\frac{1}{3}}(x-3)^{\frac{2}{3}}$$

2 必要ならロピタルの定理を用いて, 次の極限值を求めよ. (演習書 問題 3.2.2 改題)

$$(1)^\dagger \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \log x}{1-x^2} \quad (2)^\dagger \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$$
$$(3)^* \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \text{Sin}^{-1} x}{x - \text{Tan}^{-1} x} \quad (4) \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \text{Tan}^{-1} x \right)$$
$$(5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - x}{x - \log x - 1} \quad (6) \lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$$

3 関数 $f(x) = |\sin x| \log x$ ($0 < x < 2\pi$) に対して, 以下の問いに答えよ.

- (1) $\lim_{x \rightarrow +0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2\pi-0} f(x)$ を求めよ.
- (2) $\lim_{x \rightarrow +0} f'(x)$, $\lim_{x \rightarrow \pi-0} f'(x)$, $\lim_{x \rightarrow \pi+0} f'(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2\pi-0} f'(x)$ を求めよ.
- (3) $g(x) = x \log x$ とした場合, $f(x)$ と $g(x)$ のそれぞれの最小値を考える. 最小値が小さいのはどちらの関数か答えよ. また小さい方の最小値を求めよ.

4 関数 $g(x) = \frac{x^2}{x - \log(1+x)}$ ($x > -1, x \neq 0$) について, 以下の問いに答えよ.

- (1) $x > -1$ において, $x - \log(1+x) \geq 0$ ($x=0$ で等号) が成り立つことを示せ.
- (2) $g(x)$ が $x > -1$ における連続関数となるように $g(0)$ の値を定めよ.

以下では, $x > -1$ で定義された連続関数 $g(x)$ について考える.

- (3) $g(x)$ の $x=0$ での微分可能性を示し, 導関数 $g'(x)$ を求めよ.
- (4) $g(x)$ が $x > -1$ において C^1 級, すなわち $g'(x)$ が連続であることを示せ.

小テスト

問 1 (1)(1)

関数 $f(x) = \frac{1}{2x} + \text{Tan}^{-1} \frac{x}{2}$ に対して, $f'(x) = 0$ はただ 1 つの正の解をもつ.これを α とするとき, 次のうちで正しいものをすべて選べ.

- (ア) $f(x)$ は $x = \alpha$ で極大値をとる.
 (イ) $f(x)$ は $x = \alpha$ で極小値をとる.
 (ウ) $f(x)$ は $x = -\alpha$ で極大値をとる.
 (エ) $f(x)$ は $x = -\alpha$ で極小値をとる.

【選択肢】 1. (ア) 2. (イ) 3. (ウ) 4. (エ)

問 2 (2)(1)

 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \log x}{1 - x^2}$ の値は?

【選択肢】 1. 0 2. 1/2 3. -1/2 4. 存在しない

問 3 (2)(2)

 $\lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$ の値は?【選択肢】 1. 0 2. 1/6 3. 1/3 4. ∞

問 4 (3)(1)

関数 $f(x) = |\sin x| \log x$ に対して, $\lim_{x \rightarrow +0} f(x)$ の値は?【選択肢】 1. -1 2. 0 3. 1 4. ∞ **レポート課題**

答だけでなく, 計算の過程も書いて下さい. (A4 用紙 1 枚にまとめて提出)

どうしても 1 枚に収まらない場合は 2 枚でもよい

第 1 問 (1)(2) 関数 $f(x) = x^{\frac{1}{3}}(x-3)^{\frac{2}{3}}$ の増減を調べ, 極値を求めよ.第 2 問 (2)(3) 極限值 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \text{Sin}^{-1} x}{x - \text{Tan}^{-1} x}$ を求めよ.第 3 問 (3)(2) 関数 $f(x) = |\sin x| \log x$ について, 極限值 $\lim_{x \rightarrow \pi-0} f'(x)$ を求めよ.第 4 問 (4)(2) 関数 $g(x) = \frac{x^2}{x - \log(1+x)}$ ($x > -1, x \neq 0$) について, $g(x)$ が $x > -1$ における連続関数となるように $g(0)$ の値を定めよ.