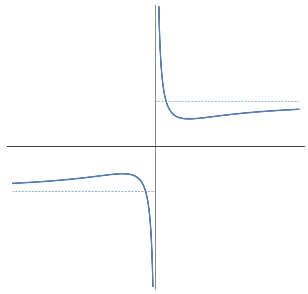
数学演習第一 (演習 第５回) 微積：極値, 関数の増減, ロピタルの定理 【解答例】

2020 年 6 月 24 日 実施

1 (1) $f(x)=\dfrac{1}{2x}+\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{x}{2}$ は $x\neq 0$ で定義された奇関数である．導関数は

$$f'(x)=-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{1+(x/2)^2}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{2x^2}+\frac{2}{x^2+4}=\frac{3x^2-4}{2x^2(x^2+4)}.$$

また, $\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\frac{\pi}{2}$. よって, $f(x)$ の増減表は以下のようになり, 極大値は $f\left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{4}-\dfrac{\pi}{6}$, 極小値は $f\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}+\dfrac{\pi}{6}$ となる．



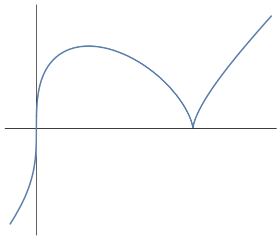
x	$-\infty$	$\cdots$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	-0	$+0$	$\cdots$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	∞
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	$-\infty$	$-\infty$	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	極大値	$\searrow$	$-\infty$	∞	$\searrow$	極小値	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

(2) $f(x)=x^{\frac{1}{3}}(x-3)^{\frac{2}{3}}$ は $\mathbb{R}$ 全体で定義されている．導関数は

$$f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(x-3)^{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}(x-2)^{-\frac{1}{3}}=x^{-\frac{2}{3}}(x-3)^{-\frac{1}{3}}(x-1).$$

よって, $f(x)$ の増減表は以下のようになり, 極大値は $f(1)=2^{\frac{2}{3}}$, 極小値は $f(3)=0$ である．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$		$+$	0	$-$		$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$2^{\frac{2}{3}}$	$\searrow$	0	$\nearrow$



2 以下, ロピタルの定理を用いた箇所を $\overset{\star}{=}$ で表す

(1) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x\log x}{1-x^2}\overset{\star}{=}\lim_{x\to1}\frac{\log x+1}{-2x}=-\frac{1}{2}.$

【別法】$y=x-1$ とおけば, (与式) $\displaystyle=\lim_{y\to0}\frac{(1+y)\log(1+y)}{-y(2+y)}=-\lim_{y\to0}\frac{1+y}{2+y}\cdot\frac{\log(1+y)}{y}=-\frac{1}{2}.$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}\overset{\star}{=}\lim_{x\to+0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}\overset{\star}{=}\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{2\cos x-x\sin x}=0.$

【注】$x\to+0$ での極限の問題になっているが, $x\to0$ に置き換えても同じ極限値を持つ.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x-\mathrm{Sin}^{-1}x}{x-\mathrm{Tan}^{-1}x}\overset{\star}{=}\lim_{x\to0}\frac{1-(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}}{1-(1+x^2)^{-1}}\overset{\star}{=}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-2x)}{(1+x^2)^{-2}\cdot2x}=\lim_{x\to0}\frac{-(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}}{2(1+x^2)^{-2}}=-\frac{1}{2}.$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{Tan}^{-1}x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\mathrm{Tan}^{-1}x}{\frac{1}{x}}\overset{\star}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=1.$

【別法】$\theta=\mathrm{Tan}^{-1}x$ とおけば, (与式) $\displaystyle=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\tan\theta\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\lim_{\varphi\to+0}\frac{\varphi\cos\varphi}{\sin\varphi}=1$ ($\varphi=\dfrac{\pi}{2}-\theta$ とした).

(5) $y=x^x$ の微分: $\log y=x\log x$ より $\dfrac{y'}{y}=\log x+1$, 従って $y'=x^x(\log x+1)$. これを用いて,

$$\lim_{x\to1}\frac{x^x-x}{x-\log x-1}\overset{\star}{=}\lim_{x\to1}\frac{x^x(\log x+1)-1}{1-\frac{1}{x}}\overset{\star}{=}\lim_{x\to1}\frac{x^x(\log x+1)^2+x^{x-1}}{\frac{1}{x^2}}=2.$$

(6) $f(x)=\log\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ $(x>0)$ とおけば, $\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{\log(\sin x)-\log x}{x^2}\overset{\star}{=}\lim_{x\to+0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}}{2x}=$ $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^2\sin x}\overset{\star}{=}\lim_{x\to+0}\frac{-x\sin x}{4x\sin x+2x^2\cos x}=\lim_{x\to+0}\frac{-\frac{\sin x}{x}}{4\cdot\frac{\sin x}{x}+2\cos x}=-\frac{1}{6}.$ よって, $\displaystyle\lim_{x\to+0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+0}e^{f(x)}=e^{-\frac{1}{6}}$ となる.

【注】$x\to+0$ での極限の問題になっているが, 考えている関数が偶関数であるから, $x\to+0$ を $x\to0$ に置き換えても同じ極限値となる.

3 以下, ロピタルの定理を用いた箇所を $\overset{\star}{=}$ で表す.

(1) • $\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0}\sin x\log x = \lim_{x\to+0}\frac{\log x}{\frac{1}{\sin x}} \overset{\star}{=} \lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = -\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}\cdot\tan x = 0.$

また, $f(x) = |\sin x|\log x$ は $x > 0$ で定義された連続関数と見なすことができ,

• $\displaystyle\lim_{x\to\pi} f(x) = f(\pi) = |\sin\pi|\log\pi = 0,\ \lim_{x\to 2\pi-0} f(x) = f(2\pi) = |\sin 2\pi|\log 2\pi = 0.$

(2) $f(x) = \begin{cases}\sin x\log x & (0 < x < \pi)\\ -\sin x\log x & (\pi < x < 2\pi)\end{cases}$ より, $f'(x) = \begin{cases}\cos x\log x + \frac{\sin x}{x} & (0 < x < \pi)\\ -(\cos x\log x + \frac{\sin x}{x}) & (\pi < x < 2\pi)\end{cases}$ だから,

• $\displaystyle\lim_{x\to+0} f'(x) = \lim_{x\to+0}\left(\cos x\log x + \frac{\sin x}{x}\right) = -\infty.$

• $\displaystyle\lim_{x\to\pi\mp0} f'(x) = \pm\lim_{x\to\pi}\left(\cos x\log x + \frac{\sin x}{x}\right) = \mp\log\pi$ (複号同順).

• $\displaystyle\lim_{x\to2\pi-0} f'(x) = -\lim_{x\to2\pi}\left(\cos x\log x + \frac{\sin x}{x}\right) = -\log 2\pi.$

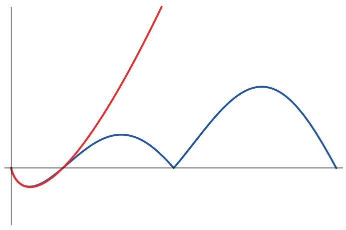
(3) まず, $\displaystyle\lim_{x\to+0} g(x) = \lim_{x\to+0}\frac{\log x}{\frac{1}{x}} \overset{\star}{=} \lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+0}(-x) = 0$ に注意する. これと (1) の結果より,

• $f(x) = \sin x\log x$ は, $f(+0) = f(1) = 0,\ f(x) < 0\ (0 < x < 1),\ f(x) \geq 0\ (x \geq 1)$ を満たす.

• $g(x) = x\log x$ は, $g(+0) = g(1) = 0,\ g(x) < 0\ (0 < x < 1),\ g(x) \geq 0\ (x \geq 1)$ を満たす.

但し $\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x)$ を $f(+0)$ というように表した. ここで述べた事実から, $f(x), g(x)$ はともに $0 < x < 1$ において, 最小値 (負の値) をとることが分かる. 更に, $0 < x < 1\ (< \pi/2)$ においては, 明らかに $0 < \sin x < x$ であるから, $f(x) - g(x) = (\sin x - x)\log x > 0$ となり, “$f(x)$ の最小値 $> g(x)$ の最小値” が示された. 最後に, $g(x)$ の最小値を求める. $g'(x) = \log x + 1$ より, $g(x)$ の増減表は以下の通り.

x	$+0$	$\cdots$	$1/e$	$\cdots$
$g'(x)$	$-\infty$	$-$	0	$+$
$g(x)$	0	↘	極小値	↗



よって, 求めるべき最小値は $g(1/e) = -1/e$ である.

4 以下, ロピタルの定理を用いた箇所を $\overset{\star}{=}$ で表す.

(1) $f(x) = x - \log(1+x)$ とおく. $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{x}{1+x}$ より, $-1 < x < 0$ で $f'(x) < 0$, $x > 0$ で $f'(x) > 0$. よって, $f(x)$ は $-1 < x < 0$ で単調減少, $x > 0$ で単調増加であるから, 最小値が $f(0) = 0$ となり, $f(x) \geq 0$ が示された.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0} g(x) = \lim_{x\to0}\frac{x^2}{x-\log(1+x)} \overset{\star}{=} \lim_{x\to0}\frac{2x}{\frac{x}{1+x}} = \lim_{x\to0}2(1+x) = 2$ なので, $g(0) = 2$ と定めればよい.

(3) 微分係数の定義により,

$$g'(0) = \lim_{h\to0}\frac{g(h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to0}\frac{h^2 - 2\{h-\log(1+h)\}}{h\{h-\log(1+h)\}} \overset{\star}{=} \lim_{h\to0}\frac{2h - 2\cdot\frac{h}{1+h}}{h - \log(1+h) + h\cdot\frac{h}{1+h}}$$
$$= \lim_{h\to0}\frac{\frac{2h^2}{1+h}}{h-\log(1+h)+\frac{h^2}{1+h}} = \lim_{h\to0}\frac{\frac{2}{1+h}g(h)}{1+\frac{1}{1+h}g(h)} = \frac{2g(0)}{1+g(0)} = \frac{4}{3}.$$

よって, $g(x)$ は $x = 0$ で微分可能である. $x > -1,\ x \neq 0$ において

$$g'(x) = \frac{2x\{x-\log(1+x)\} - x^2\cdot\frac{x}{1+x}}{\{x-\log(1+x)\}^2} = \frac{x^2(2+x) - 2x(1+x)\log(1+x)}{(1+x)\{x-\log(1+x)\}^2}$$

より, 以上をまとめて, $g'(x) = \begin{cases}\frac{x^2(2+x)-2x(1+x)\log(1+x)}{(1+x)\{x-\log(1+x)\}^2} & (x > -1,\ x \neq 0),\\ \frac{4}{3} & (x = 0).\end{cases}$

(4) $x > -1,\ x \neq 0$ において, $g'(x)$ の分子, 分母はともに連続で, 分母は 0 にならないので, $g(x)$ は連続である. また, $g'(0) = \displaystyle\lim_{h\to0}\frac{g(h)-g(0)}{h} \overset{\star}{=} \lim_{h\to0} g'(h)$ より, $g'(x)$ は $x = 0$ でも連続である. よって, $g(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で C^1 級である. 【注】この論法により, 一般に, 連続関数 $\varphi(x)$ が $x = a$ を除いて微分可能であることが分かっているとき, $\displaystyle\lim_{x\to a}\varphi'(x)$ が存在すれば, それが $\varphi'(a)$ となり, $\varphi'(x)$ は $x = a$ で連続となる.