

数学演習第一 (演習第 6 回)

線形：連立 1 次方程式 2020 年 7 月 1 日

◎ 教材一覧のお知らせ欄に、重要なお知らせ《重要》日程変更・補習授業・レポート課題の解説ビデオがありますので、必ず読んで下さい。

* **小テスト** の問題は **1** の 4 問, **レポート課題** は **2** の 4 問です。それ以外の問題は自習問題です。

* 要点を読んでから取り組むと分かりやすいと思います。

【要点】

〈係数行列, 拡大係数行列〉

$$\text{連立 1 次方程式} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad \text{を考える。このとき,}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad \text{とすれば, この連立 1 次方程式は } A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ と表せ}$$

る。このとき, この行列 A を係数行列, $[A \ \mathbf{b}]$ を拡大係数行列という。

〈連立 1 次方程式の解〉

まず, 連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ を考える。拡大係数行列 $[A \ \mathbf{b}]$ を簡約化した行列が $[C \ \mathbf{d}]$ であるとき, 行基本変形の意味を考えれば, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ と $C\mathbf{x} = \mathbf{d}$ は同値な連立 1 次方程式であるから, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ を解くには $C\mathbf{x} = \mathbf{d}$ を解けばよい。解をもつための条件は $\text{rank } C = \text{rank}[C \ \mathbf{d}]$ つまり $\text{rank } A = \text{rank}[A \ \mathbf{b}]$ であり, このとき $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解は $s = n - \text{rank } A$ 個のパラメータ (任意定数) を含む形で表される。

次に, 同次連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を考える。 A の簡約行列 C を求めて, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ と同値な $C\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を解けばよい。 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は $s = n - \text{rank } A$ 個の 1 次独立な解をもち, 任意の解はその 1 次結合で表される。この s を $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解の自由度といい, s 個の 1 次独立な解を $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の基本解と呼ぶ。

〈例〉 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ とする。

まず, 連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{d}$ を考える。 $[A \ \mathbf{d}]$ を簡約化すると $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a+2 & 4 \end{bmatrix}$ なので, $a = -2$

のとき解なし。 $a \neq -2$ のとき, さらに $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{a-2}{a+2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a-2}{a+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{a+2} \end{bmatrix}$ まで変形され, 解は $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{a-2}{a+2} \\ \frac{a-2}{a+2} \\ \frac{4}{a+2} \end{bmatrix}$ 。

次に, 同次連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を考える。 A を簡約化すると $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a+2 \end{bmatrix}$ 。 $a \neq -2$ のとき, 解

は $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 。 $a = -2$ のとき, $x_3 = t$ とおくと $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 。つまり $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ が基本解。

1 小テスト問題

連立1次方程式 $Ax = b$ を考える. $[A \ b]$ の簡約行列が $[C \ d]$ であるとき, 以下の問いに答えよ.
ただし, 解の自由度とは解の表示に現れるパラメータ (任意定数) の個数を表す.

(1) $[C \ d] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ であるとき, 連立1次方程式 $Ax = b$ の解について正しい主張をしているものを次から選択せよ.

1. 解は1つ. 2. 解が存在し, 解の自由度は1. 3. 解が存在し, 解の自由度は2.
4. 解は存在しない.

(2) $[C \ d] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ であるとき, 連立1次方程式 $Ax = b$ の解について正しい主張をしているものを次から選択せよ.

1. 解は1つ. 2. 解が存在し, 解の自由度は1. 3. 解が存在し, 解の自由度は2.
4. 解は存在しない.

(3) $[C \ d] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ であるとき, 連立1次方程式 $Ax = b$ の解について正しい主張をしているものを次から選択せよ.

1. 解は1つ. 2. 解が存在し, 解の自由度は1. 3. 解が存在し, 解の自由度は2.
4. 解は存在しない.

(4) $[C \ d] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ であるとき, 連立1次方程式 $Ax = b$ の解について正しい主張をしているものを次から選択せよ.

1. 解は1つ. 2. 解が存在し解の自由度は1. 3. 解が存在し解の自由度は2.
4. 解は存在しない.

2 レポート課題

次の連立1次方程式を解きなさい.

((1) は逆行列を用い, (2), (3), (4) は拡大係数行列を簡約化して解きなさい.)

$$(1) \begin{cases} -3x + 2y = 1 \\ -2x + 2y = 3 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ x - y - 2z = 0 \\ x + y + 4z = 2 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x + 2y + 4z = 3 \\ x + 3y + 7z = 6 \\ x - y - 5z = 4 \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \\ 3x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

3 次の連立1次方程式を解け. ((1)は逆行列を用い, (2)は拡大係数行列を簡約化せよ.)

$$(1) \begin{cases} 7x + 5y = 1 \\ 3x + 2y = 3 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 - 5x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_3 + x_4 = -4 \\ x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + 13x_3 + 4x_4 = 5 \end{cases}$$

4 次の同次連立1次方程式を解け. 更に, **基本解**と**解の自由度**を求めよ.

$$(1) \begin{cases} -x + 5y + 4z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ -2x + 3y + z = 0 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

5 連立1次方程式 $\begin{cases} x + 3y - z = -1 \\ x + 4y + az = 1 \\ 3x + 12y + a^2z = a \end{cases}$ について以下の問いに答えよ.

- (1) 係数行列と拡大係数行列の階数を調べよ. (a の値によって場合分けせよ.)
- (2) (1)の場合分けに対応して, 解の個数(ただ1つ, 無数, なし)を調べよ.
- (3) 解を「3平面の共有点の集合」と見て, 図形的な言葉(点, 直線, 空集合)で解を表現せよ.

6 ベクトル $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ k \\ 1 \end{bmatrix}$ (k は定数)について次の問いに答えよ.

- (1) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ が**1次独立**(すなわち $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + c_3\mathbf{a}_3 + c_4\mathbf{a}_4 = \mathbf{0} \Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$)となるような k の条件を求めよ.
- (2) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ が**1次従属**(すなわち $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + c_3\mathbf{a}_3 + c_4\mathbf{a}_4 = \mathbf{0}$ を満たす $(c_1, c_2, c_3, c_4) \neq (0, 0, 0, 0)$ が存在)となるような k の条件を求めよ. また, そのとき $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ の**非自明な1次関係式** $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + c_3\mathbf{a}_3 + c_4\mathbf{a}_4 = \mathbf{0}$ ($(c_1, c_2, c_3, c_4) \neq (0, 0, 0, 0)$)を1つ挙げよ.

[ヒント] c_1, c_2, c_3, c_4 を未知数(変数)とする同次連立1次方程式を考えよ.