数学演習第一 (演習 第 6 回)　線形 : 連立 1 次方程式 ［解答例］　2020 年 7 月 1 日 実施

1 【小テスト】

連立 1 次方程式の変数 (未知数) の数は $n = 4$ である．解の表示に含まれるパラメータの数を解の自由度と呼んでいることに注意.

(1) $2 = \operatorname{rank} C \neq \operatorname{rank}[C \;\; d] = 3$ であるので解は存在しない．<u>答えは 4 .</u>

(2) $\operatorname{rank} C = \operatorname{rank}[C \;\; d] = 2$ より解は存在する．解の自由度は $n - \operatorname{rank} C = 2$．<u>答えは 3 .</u>

(3) $\operatorname{rank} C = \operatorname{rank}[C \;\; d] = 3$ より解は存在する．解の自由度は $n - \operatorname{rank} C = 1$．<u>答えは 2 .</u>

(4) $\operatorname{rank} C = \operatorname{rank}[C \;\; d] = 3$ より解は存在する．解の自由度は $n - \operatorname{rank} C = 1$．<u>答えは 2 .</u>

2 【レポート】

(1) $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ であり $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ である.

よって，<u>求める解は $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$.</u>

(2) この連立 1 次方程式の拡大係数行列を簡約化すると

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

よって，<u>求める解は $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ (t は任意定数).</u>

(3) この連立 1 次方程式の拡大係数行列を簡約化すると

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 7 & 6 \\ 1 & -1 & -5 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -9 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \left(\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right).$$

よって，<u>解なし.</u>

(4) この連立 1 次方程式の係数行列を簡約化すると

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

よって，<u>求める解は $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (t は任意定数).</u>

3 (1) 与えられた連立 1 次方程式は $\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ と書ける．よって，

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -18 \end{bmatrix}.$$

解法の指定がなければ，勿論, 拡大係数行列を簡約化して解いてもよい.

(2) 拡大係数行列を簡約化して,

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 11 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 8 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 13 & 4 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & -4 \\ 2 & 3 & 11 & -5 & 1 \\ 1 & 2 & 8 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 13 & 4 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & 15 & -7 & 9 \\ 0 & 2 & 10 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 15 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & 15 & -7 & 9 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 15 & 3 & 9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 15 & -7 & 9 \\ 0 & 3 & 15 & 3 & 9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

方程式は $\begin{cases} x_1 \qquad - 2x_3 \qquad = -4 \\ \qquad x_2 + 5x_3 \qquad = \ \ 3 \\ \qquad\qquad\qquad x_4 = \ \ 0 \end{cases}$ と簡約化されるので，求める解は $x_3 = t$ とおいて

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4+2t \\ 3-5t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (t \text{ は任意定数}).$$

4 係数行列を簡約化して解を求める.

(1) $\begin{bmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 0 & 11 & 11 \\ 0 & -7 & -7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ であるから，

方程式は $\begin{cases} x \qquad + z = 0 \\ \qquad y + z = 0 \end{cases}$ と簡約化されるので，解は $z = t$ とおいて

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ -t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (t \text{ は任意定数}).$$

よって, 基本解は $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ で解の自由度は 1.

(2) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ であるから，

方程式は $\begin{cases} x_1 \qquad + \frac{1}{2}x_3 \qquad = 0 \\ \qquad x_2 - \frac{1}{2}x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$ と簡約化されるので，解は $x_3 = 2s$, $x_4 = t$ とおいて

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ s-t \\ 2s \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (s, t \text{ は任意定数}).$$

よって, 基本解は $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ で, 解の自由度は 2.

5 (1) $\begin{bmatrix}1&3&-1&-1\\1&4&a&1\\3&12&a^2&a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&-1&-1\\0&1&a+1&2\\0&3&a^2+3&a+3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&-1&-1\\0&1&a+1&2\\0&0&a(a-3)&a-3\end{bmatrix}.$

- $a=0$ のとき, $\begin{bmatrix}1&3&-1&-1\\0&1&1&2\\0&0&0&-2\end{bmatrix}$ となり, 係数行列の階数は 2, 拡大係数行列の階数は 3.
- $a=3$ のとき, $\begin{bmatrix}1&3&-1&-1\\0&1&4&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ となり, 係数行列, 拡大係数行列ともに階数は 2.
- $a\neq 0, 3$ のとき, 係数行列, 拡大係数行列ともに階数は 3.

[注] 階数を求めるだけなら上の形まで変形すれば十分. (勿論, 簡約行列まで求めてもよい.)

(2)
- $a=0$ のとき, $2=$ (係数行列の階数) $<$ (拡大係数行列の階数) $=3$ なので解なし.
- $a=3$ のとき, $\begin{bmatrix}1&3&-1&-1\\0&1&4&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}\to\cdots\to\begin{bmatrix}1&0&-13&-7\\0&1&4&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ であるから, 解は無数にあり, その解は $x=-7+13t,\ y=2-4t,\ z=t$ (t は任意定数).
- $a\neq 0, 3$ のとき,

$$\begin{bmatrix}1&3&-1&-1\\0&1&a+1&2\\0&0&a(a-3)&a-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&-1&-1\\0&1&a+1&2\\0&0&1&1/a\end{bmatrix}$$
$$\to\begin{bmatrix}1&3&0&1/a-1\\0&1&0&1-1/a\\0&0&1&1/a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&4/a-4\\0&1&0&1-1/a\\0&0&1&1/a\end{bmatrix}$$

であるから, 解はただ 1 つで, $x=\dfrac{4}{a}-4,\ y=1-\dfrac{1}{a},\ z=\dfrac{1}{a}.$

(3)
- $a=0$ のとき, 解は空集合.
- $a=3$ のとき, 解は直線 $\dfrac{x+7}{13}=\dfrac{y-2}{-4}=z.$
- $a\neq 0, 3$ のとき, 解は点 $\left(\dfrac{4}{a}-4,\ 1-\dfrac{1}{a},\ \dfrac{1}{a}\right).$

6 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$ の 1 次関係式 $c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2+c_3\boldsymbol{a}_3+c_4\boldsymbol{a}_4=\boldsymbol{0}$ は c_1,c_2,c_3,c_4 を未知数 (変数) とする同次連立 1 次方程式

$$[\,\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3\ \boldsymbol{a}_4\,]\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\\c_4\end{bmatrix}=\boldsymbol{0} \qquad (*)$$

と見なせる. 係数行列を簡約化すると,

$$[\,\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3\ \boldsymbol{a}_4\,]=\begin{bmatrix}1&2&3&2\\2&0&1&3\\-1&1&3&k\\0&1&2&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3&2\\0&-4&-5&-1\\0&3&6&k+2\\0&1&2&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3&2\\0&1&2&1\\0&-4&-5&-1\\0&3&6&k+2\end{bmatrix}$$
$$\to\begin{bmatrix}1&2&3&2\\0&1&2&1\\0&0&3&3\\0&0&0&k-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&1&2&1\\0&0&1&1\\0&0&0&k-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&k-1\end{bmatrix}.$$

(1) $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$ が 1 次独立とは $(*)$ の解が $c_1=c_2=c_3=c_4=0$ に限られることであるから, 求める条件は $k\neq 1$.

(2) $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$ が 1 次従属とは $(*)$ が自明でない解をもつことであるから, 求める条件は $k=1$. このとき $(*)$ の解は $c_1=-t,\ c_2=t,\ c_3=-t,\ c_4=t$ (t は任意定数). 特に, $t=-1$ と選び, 非自明な 1 次関係式 $\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3-\boldsymbol{a}_4=\boldsymbol{0}$ を得る.