数学演習第一 （演習第７回）

微積：高次の導関数, テーラーの定理, 有限テーラー展開

2020 年 7 月 8 日

- $\boxed{\textbf{小テスト}}$ の問題, $\boxed{\textbf{レポート課題}}$ は 3 枚目にまとめてあります.

(以下の問題で, 小テスト, レポート課題に関係する問題をそれぞれ †, * で示してあります.)

要点 1

1°. **n 回微分可能, n 回連続微分可能 (C^n 級)**

- 微分可能 = 1 回微分可能, 導関数 = 1 次導関数と解釈する. $n \geqslant 2$ に対して, 帰納的に, $f(x)$ が $n-1$ 回微分可能で, $n-1$ 次導関数 $f^{(n-1)}(x)$ が微分可能なとき, $f(x)$ は **n 回微分可能** であるといい, $f^{(n-1)}(x)$ の導関数 $f^{(n)}(x) := \frac{d}{dx}f^{(n-1)}(x)$ を **n 次導関数**という.
- $f(x)$ が n 回微分可能で n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ が連続のとき, $f(x)$ は **n 回連続微分可能**または **C^n 級**という. (微分可能なら連続ゆえ) $f(x)$ が n 回微分可能ならば C^{n-1} 級であることが保証される. また, $f(x)$ が何回でも微分可能なとき, $f(x)$ は**無限回微分可能**または **C^∞ 級**という.

2°. **Leibniz（ライプニッツ）の公式**

$f(x), g(x)$ が n 回微分可能ならば, 積 $f(x)g(x)$ も n 回微分可能であり, 次の関係式が成り立つ:

$$\{f(x)g(x)\}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x). \qquad (\textbf{注}:\ f^{(0)} = f,\ f^{(1)} = f',\ f^{(2)} = f'')$$

3°. **基本的な関数の n 次導関数**

① $(e^x)^{(n)} = e^x$. ② $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$. ③ $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$.

④ $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$. 一般に, $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$ (α は定数, $n \geqslant 1$).

⑤ $(\log x)^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$ $(n \geqslant 1)$.

1 * $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ の導関数を求め, C^1 級かどうかを調べよ.

2 開区間 I 上の C^2 級関数 $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ が与えられたとき, $\varphi'(t) \neq 0$ $(t \in I)$ であれば, y は x の C^2 級関数となる. このとき, $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を t の関数として表せば, 次の式が得られる. これを示せ.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{\{\varphi'(t)\}^3}.$$

3 次の x の関数 y の n 次導関数 $y^{(n)}$ を求めよ (演習書 問題 3.2.5 類題).

(0) **要点 1** の 3° を確認せよ. (1) $y = f(ax+b)$ (f は C^∞ 級, a, b は定数で $a \neq 0$)

(2)† $y = \log(1-x)$ (3)† $y = \cos^2 x$ ($\cos 2x$ で表す) (4) $y = \dfrac{1}{1+x-2x^2}$ (部分分数分解)

(5)* $y = x^2 e^{-2x}$ (Leibniz の公式) (6)* $y = e^{-x}\cos x$ (まず y' を三角関数の合成で整理)

(7) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ (**2 重階乗**を用いて表せ) 但し, n の **2 重階乗** $n!!$ は

$$n!! = \begin{cases} 1\cdot 3\cdots n & (n\text{ 以下の奇数の積}) & \text{if } n \geqslant 1 : \text{奇数} \\ 2\cdot 4\cdots n & (n\text{ 以下の偶数の積}) & \text{if } n \geqslant 2 : \text{偶数} \end{cases} \quad \text{および} \quad (-1)!! = 0!! = 1$$

で定義される. 従って, 例えば $n! = (n-1)!! \cdot n!!$, $(2n)!! = 2^n n!$ $(n \geqslant 0)$ が成り立つ.

要点 2

1°. 有限 Taylor（テイラー）展開

$f(x)$ が a を含む開区間 I で N 回微分可能なとき, 各 $x \in I$ に対して,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_N(x), \qquad \underbrace{R_N(x)}_{N\text{ 次の剰余項}} = \frac{f^{(N)}(a+\theta(x-a))}{N!}(x-a)^N$$

を満たす θ $(0<\theta<1)$ が存在する. 特に, $a=0$ の場合を**有限 Maclaurin（マクローリン）展開**という.

2°. 基本的な関数の有限 Maclaurin 展開

① $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} \frac{x^n}{n!} + R_N(x).$

② $\cos x = \displaystyle\sum_{m=0}^{M-1} \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m} + R_{2M}(x),$ ③ $\sin x = \displaystyle\sum_{m=0}^{M-1} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1} + R_{2M+1}(x).$

④ $\dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n x^n + R_N(x),$ ⑤ $\log(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{N-1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + R_N(x) \quad (x>-1).$

4 (演習書 問題 3.2.7 類題) 次の各関数 $f(x)$ に対して, $f^{(n)}(0)$ を計算し, 有限 Maclaurin 展開

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + R_N(x), \quad R_N(x) = \frac{f^{(N)}(\theta x)}{N!} x^N \ \ \underbrace{(0 < {}^\exists\theta < 1)}_{\theta\text{ は } x,\,N\text{ に依存}}$$

を書け. 更に, $N=6$ $(M=3)$ の場合を具体的な数字を使って表せ (剰余項の具体形は不要).

(1) $f(x)=e^x$ (2)[†] $f(x)=\cos x$ (3) $f(x)=\sin x$ ((2), (3) については上の ②, ③ の形で)

(4) $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ (5) $f(x)=\log(1+x)$ (6)* $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ ((4) から (6) は $x>-1$ の範囲)

(7) $f(x)=\cosh x$ (8)[†] $f(x)=\sinh x$ ((7), (8) については上の ②, ③ の形で)

5 関数 x^p, $\dfrac{1}{x^p}$ $(p\in\mathbb{N})$ に対して, $x=1$ における有限 Taylor 展開を N 次 $(N>p)$ の剰余項 $R_N(x)$ まで求めよ.

6 $f(x)$ が 0 を含む開区間 I で C^∞ 級のとき, 任意の自然数 N に対して $f(x)$ は $\boxed{4}$ で述べた形の有限 Maclaurin 展開をもつ. そこに現れる x^n の係数 $a_n := \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ について以下の問いに答えよ.

(0) $f(x)$ が奇関数 (すなわち $f(-x)=-f(x)$) のとき $a_{2m}=0$ となることを示せ. また, $f(x)$ が偶関数 (すなわち $f(-x)=f(x)$) のとき $a_{2m+1}=0$ となることを示せ.

以下の関数 $f(x)$ は両方とも奇関数なので $f^{(2m)}(0)=a_{2m}=0$ $(m\geqslant 0)$ が成り立つことに注意する.

(1) $f(x)=\mathrm{Tan}^{-1}\,x$ のとき, ① $(x^2+1)f'(x)=1$ を確認せよ. ② 前式の両辺を n 回微分して

$$(x^2+1)f^{(n+1)}(x)+2nf^{(n)}(x)+n(n-1)f^{(n-1)}(x)=0 \quad (n\geqslant 1)$$

を示せ. ③ $f^{(2m+1)}(0)=(-1)^m(2m)!$ $(m\geqslant 0)$ を示せ. ④ a_{2m+1} $(m\geqslant 0)$ を求めよ.

(2) $f(x)=\tan x$ に対して, ① $f'(x)=1+f(x)^2$ を確認せよ. ② 前式の両辺を n 回微分して $f^{(n+1)}(x)$ を $f^{(j)}(x)$ $(0\leqslant j\leqslant n)$ で表せ. ③ $f^{(2m+1)}(0)$ を $f^{(2k+1)}(0)$ $(0\leqslant k\leqslant m-1)$ で表せ. ④ a_{2m+1} を a_{2k+1} $(0\leqslant k\leqslant m-1)$ で表せ. ⑤ a_1, a_3, a_5, a_7 を求めよ.

小テスト

問 1（$\boxed{3}$(2)）

関数 $y=\log(1-x)$ の n 次導関数は？　$(n \geqslant 1)$

（ア） $\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1-x)^n}$　　**（イ）** $\dfrac{(-1)^n n!}{(1-x)^{n+1}}$

（ウ） $\dfrac{(n-1)!}{(1-x)^n}$　　**（エ）** $-\dfrac{(n-1)!}{(1-x)^n}$

［選択肢］　1.（**ア**）　2.（**イ**）　3.（**ウ**）　4.（**エ**）

問 2（$\boxed{3}$(3)）

関数 $y=\cos^2 x$ の n 次導関数は？　$(n \geqslant 1)$

（ア） $\cos^2\Bigl(x+\dfrac{n\pi}{2}\Bigr)$　　**（イ）** $\dfrac{1}{2}\cos\Bigl(2x+\dfrac{n\pi}{2}\Bigr)$

（ウ） $2^{n-1}\cos\Bigl(2x+\dfrac{n\pi}{2}\Bigr)$　　**（エ）** $2^n\cos\Bigl(2x+\dfrac{n\pi}{2}\Bigr)$

［選択肢］　1.（**ア**）　2.（**イ**）　3.（**ウ**）　4.（**エ**）

問 3（$\boxed{4}$(2)）

$\cos x$ の有限 Maclaurin 展開を 6 次の剰余項 $R_6(x)$ を用いて表すと？

（ア） $\cos x = 1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}+R_6(x)$　　**（イ）** $\cos x = 1+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}+R_6(x)$

（ウ） $\cos x = 1-\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{x^4}{120}+R_6(x)$　　**（エ）** $\cos x = 1+\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{x^4}{120}+R_6(x)$

［選択肢］　1.（**ア**）　2.（**イ**）　3.（**ウ**）　4.（**エ**）

問 4（$\boxed{4}$(8)）

$\sinh x$ の有限 Maclaurin 展開を 7 次の剰余項 $R_7(x)$ を用いて表すと？

（ア） $\sinh x = x-\dfrac{x^3}{2}+\dfrac{x^5}{24}+R_7(x)$　　**（イ）** $\sinh x = x+\dfrac{x^3}{2}+\dfrac{x^5}{24}+R_7(x)$

（ウ） $\sinh x = x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}+R_7(x)$　　**（エ）** $\sinh x = x+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}+R_7(x)$

［選択肢］　1.（**ア**）　2.（**イ**）　3.（**ウ**）　4.（**エ**）

レポート課題

答だけでなく，計算の過程も書いて下さい．(**A4 用紙 1 枚**にまとめて提出)

どうしても 1 枚に収まらない場合は 2 枚でもよい

第 1 問（$\boxed{1}$）$\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$ の導関数を求め，$f(x)$ が C^1 級かどうかを調べよ．

第 2 問（$\boxed{3}$(5)）$y=x^2e^{-2x}$ の n 次導関数 $y^{(n)}$ を求めよ．(Leibniz の公式を用いよ)

第 3 問（$\boxed{3}$(6)）$y=e^{-x}\cos x$ の n 次導関数 $y^{(n)}$ を求めよ．(まず y' を三角関数の合成を用いて整理せよ)

第 4 問（$\boxed{4}$(6)）$\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ $(x>-1)$ を $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}=\displaystyle\sum_{n=0}^{5}a_nx^n+R_6(x)$ の形に有限 Maclaurin 展開せよ．

($R_6(x)$ の具体形は書かなくてよい.)