数学演習第一（演習第７回）【解答例】

微積： 高次の導関数, テーラーの定理, 有限テーラー展開　　2020 年 7 月 8 日

1 $f(x)$ は明らかに $x \neq 0$ において C^∞ 級であり, そこでの導関数は

$$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} + x^2\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}.$$

また, $x=0$ における微分係数は

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} h\sin\frac{1}{h} = 0 \ \ \text{(最後の等号は } |h\sin(1/h)| \leqslant |h| \to 0 \text{ による).}$$

よって, $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で微分可能であり, その導関数は

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin(1/x) - \cos(1/x) & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

で与えられる. ここで, 数列 $\{a_n\}$ を $a_n = 1/(n\pi)$ で定めれば, $n\to\infty$ のとき, $a_n \to 0$ であるが, $f'(a_n) = -(-1)^n \not\to 0 = f'(0)$. これは $f'(x)$ が $x=0$ で連続でないことを示す. よって, $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で微分可能だが, $x=0$ の周りで C^1 級でない.

2 まず, 仮定より $x=\varphi(t)$ の逆関数 $t=\varphi^{-1}(x)$ が存在し, $y=\psi(\varphi^{-1}(x))$ と書ける. よって, y を x で微分すれば, 合成関数・逆関数の微分公式を用いて,

$$\frac{dy}{dx} = \{\psi(\varphi^{-1}(x))\}' = \psi'(\varphi^{-1}(x))\{\varphi^{-1}(x)\}' = \frac{\psi'(\varphi^{-1}(x))}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \ \ (x=\varphi(t)).$$

次に, $\omega(t) = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ とおけば, $\dfrac{dy}{dx} = \omega(\varphi^{-1}(x))$ と書けるから, 上と同じ論法で $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \{\omega(\varphi^{-1}(x))\}' = \dfrac{\omega'(\varphi^{-1}(x))}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}$. ここで, $\omega'(t) = \dfrac{\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}{\varphi'(t)^2}$ より,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\omega'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}{\varphi'(t)^3} \ \ (x=\varphi(t)).$$

次のように表現することもできる:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right) = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{d^2x}{dt^2}\frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}.$$

3 (n の範囲がなければ $n \geqslant 0$ で正しいことを意味する.)

(0) ① $y=e^x$ は微分に対して不変であるから, 明らかに $y^{(n)} = e^x$. ②,③ $(\cos x)' = -\sin x = \cos(x+\frac{\pi}{2})$, $(\sin x)' = \cos x = \sin(x+\frac{\pi}{2})$ であるから, $\cos x$, $\sin x$ はともに 1 回微分するごとに “偏角” が $\frac{\pi}{2}$ ずつ増えていく. よって, $(\cos x)^{(n)} = \cos(x+\frac{n\pi}{2})$, $(\sin x)^{(n)} = \sin(x+\frac{n\pi}{2})$. ④ $y = x^\alpha$ のとき, $y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$ $(n\geqslant 1)$. 特に, $y=1/x=x^{-1}$ $(\alpha=-1)$ のとき, $y^{(n)} = (-1)(-2)\cdots(-n)x^{-n-1} = (-1)^n n!/x^{n+1}$. ⑤ $(\log x)^{(n)} = (1/x)^{(n-1)} = (-1)^{n-1}(n-1)!/x^n$ $(n\geqslant 1)$.

(1) $y' = f'(ax+b)\cdot\{ax+b\}' = af'(ax+b)$. これを繰り返して, $y^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b)$.

(2) $y = \log(1-x) = \log((-1)x+1)$ より, (0)⑤と (1) を用いて, $y^{(n)} = (-1)^n\cdot(-1)^{n-1}(n-1)!/(1-x)^n = (n-1)!/(1-x)^n$ $(n\geqslant 1)$.

(3) $y = \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$ より, (0)②と (1) を用いて, $y^{(n)} = \frac{1}{2}\cdot 2^n\cos(2x+\frac{n\pi}{2}) = 2^{n-1}\cos(2x+\frac{n\pi}{2})$.

(4) $y = \dfrac{1}{(1-x)(1+2x)} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{2}{1+2x}\right)$ と部分分数分解し, (0)④と (1) の結果を用いて,

$$y^{(n)} = \left\{\frac{1}{1+x-2x^2}\right\}^{(n)} = \frac{1}{3}\left\{\frac{(-1)^n(-1)^n n!}{(1-x)^{n+1}} + \frac{2\cdot 2^n(-1)^n n!}{(1+2x)^{n+1}}\right\} = \frac{n!}{3}\left\{\frac{1}{(1-x)^{n+1}} + \frac{(-1)^n 2^{n+1}}{(1+2x)^{n+1}}\right\}.$$

(5) $y = x^2e^{-2x}$ より, $y' = 2xe^{-2x} + x^2(-2e^{-2x}) = -2(x^2-x)e^{-2x}$. $n\geqslant 2$ のときは Leibniz の公式を用いて,

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\{x^2\}^{(k)}\{e^{-2x}\}^{(n-k)} = x^2(e^{-2x})^{(n)} + n\cdot 2x(e^{-2x})^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2}\cdot 2(e^{-2x})^{(n-2)} \\ &= \left\{(-2)^n x^2 + 2n(-2)^{n-1}x + n(n-1)(-2)^{n-2}\right\}e^{-2x} = \underbrace{(-2)^n\left\{x^2 - nx + \tfrac{1}{4}n(n-1)\right\}e^{-2x}}_{\text{この式は } n=0,1 \text{ でも正しい}}. \end{aligned}$$

(6) $y=e^{-x}\cos x$ より, $y'=e^{-x}(-\cos x-\sin x)=-\sqrt{2}\,e^{-x}\bigl(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\bigr)=-\sqrt{2}\,e^{-x}\cos\bigl(x-\dfrac{\pi}{4}\bigr)$. これを繰り返して, $y^{(n)}=(-\sqrt{2}\,)^n e^{-x}\cos\bigl(x-\dfrac{n\pi}{4}\bigr)$. ($\{e^{-x}\cos(x+\alpha)\}'=-\sqrt{2}\,e^{-x}\cos(x+\alpha-\frac{\pi}{4})$ (α は定数) であることに注意.) Leibniz の公式を用いた表現も可能: $y^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{n}{k}(-1)^{n-k}e^{-x}\cos\bigl(x+\dfrac{k\pi}{2}\bigr)$.

(7) $y^{(n)}=\Bigl(-\dfrac{1}{2}\Bigr)\Bigl(-\dfrac{1}{2}-1\Bigr)\cdots\Bigl(-\dfrac{1}{2}-(n-1)\Bigr)x^{-\frac{1}{2}-n}=(-1)^n\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{2}\cdots\dfrac{2n-1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}-n}=\dfrac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n x^n\sqrt{x}}$.

4 以下, N 次剰余項 $R_N(x)$ の表現式の中の θ は $0<\theta<1$ を満たす適当な数 (x,N に依存) を表す.

(1) $f(x)=e^x$ より, $f^{(n)}(x)=e^x$, $f^{(n)}(0)=1$ $(n\geqslant 0)$. よって, $e^x=\sum\limits_{n=0}^{N-1}\dfrac{x^n}{n!}+R_N(x)$, $R_N(x)=\dfrac{e^{\theta x}}{N!}x^N$.

$N=6$ なら, $e^x=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^4}{4!}+\dfrac{x^5}{5!}+R_6(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^4}{24}+\dfrac{x^5}{120}+R_6(x)$.

(2) $f^{(n)}(x)=\cos\bigl(x+\dfrac{n\pi}{2}\bigr)$, $f^{(n)}(0)=\cos\dfrac{n\pi}{2}=\begin{cases}(-1)^m & (n=2m)\\ 0 & (n=2m+1)\end{cases}$ $(n\geqslant 0)$ より,

$$\cos x=\sum_{m=0}^{M-1}\frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m}+R_{2M}(x),\quad R_{2M}(x)=\frac{\cos(\theta x+\frac{2M\pi}{2})}{(2M)!}\,x^{2M}=\frac{(-1)^M\cos\theta x}{(2M)!}\,x^{2M}.$$

$M=3$ なら, $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+R_6(x)=1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}+R_6(x)$.

(3) $f^{(n)}(x)=\sin\bigl(x+\dfrac{n\pi}{2}\bigr)$, $f^{(n)}(0)=\sin\dfrac{n\pi}{2}=\begin{cases}0 & (n=2m)\\ (-1)^m & (n=2m+1)\end{cases}$ $(n\geqslant 0)$ より,

$\sin x=\sum\limits_{m=0}^{M-1}\dfrac{(-1)^m}{(2m+1)!}x^{2m+1}+R_{2M+1}(x)$, $R_{2M+1}(x)=\dfrac{\sin(\theta x+\frac{(2M+1)\pi}{2})}{(2M+1)!}\,x^{2M+1}=\dfrac{(-1)^M\cos\theta x}{(2M+1)!}\,x^{2M+1}$.

$M=3$ なら, $\sin x=\dfrac{x}{1!}-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+R_7(x)=x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}+R_7(x)$.

(4) $f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$ $(n\geqslant 0)$ より, $f^{(n)}(0)=(-1)^n n!$ $(n\geqslant 0)$. よって, $x>-1$ に対して,

$\dfrac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{N-1}(-1)^n x^n+R_N(x)$, $R_N(x)=\dfrac{(-x)^N}{(1+\theta x)^{N+1}}$. (実は, 等比数列の和の公式から $R_N(x)=\dfrac{(-x)^N}{1+x}$).

$N=6$ なら, $\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+R_6(x)$.

(5) $f(x)=\log(1+x)$ より, $f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$ $(n\geqslant 1)$. 故に, $f(0)=0$, $f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$ $(n\geqslant 1)$. よって, $x>-1$ に対して, $\log(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{N-1}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+R_N(x)$, $R_N(x)=\dfrac{(-1)^{N-1}}{N(1+\theta x)^N}\,x^N$.

$N=6$ なら, $\log(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^5}{5}+R_6(x)$.

(6) $\boxed{3}$(7) の結果から, $f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n(1+x)^{n+\frac{1}{2}}}$, $f^{(n)}(0)=\dfrac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n}$, $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}=\dfrac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}$ $(n\geqslant 0)$. よって, $x>-1$ に対して, $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}=\sum\limits_{n=0}^{N-1}\dfrac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n+R_N(x)$, $R_N(x)=\dfrac{(2N-1)!!}{(2N)!!}\dfrac{(-x)^N}{(1+\theta x)^{N+\frac{1}{2}}}$.

$N=6$ なら, $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{8}x^2-\dfrac{5}{16}x^3+\dfrac{35}{128}x^4-\dfrac{63}{256}x^5+R_6(x)$.

(7) $f(x)=\cosh x$ より, $f^{(2m)}(x)=\cosh x$, $f^{(2m+1)}(x)=\sinh x$ $(m\geqslant 0)$. 故に, $f^{(2m)}(0)=1$, $f^{(2m+1)}(0)=1$, $(m\geqslant 0)$. よって, $\cosh x=\sum\limits_{m=0}^{M-1}\dfrac{1}{(2m)!}x^{2m}+R_{2M}(x)$, $R_{2M}(x)=\dfrac{\cosh\theta x}{(2M)!}\,x^{2M}$.

$M=3$ なら, $\cosh x=1+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}+R_6(x)$.

(8) $f(x)=\sinh x$ より, $f^{(2m)}(x)=\sinh x$, $f^{(2m+1)}(x)=\cosh x$ $(m\geqslant 0)$. 故に, $f^{(2m)}(0)=0$, $f^{(2m+1)}(0)=1$, $(m\geqslant 0)$. よって, $\sinh x=\sum\limits_{m=0}^{M-1}\dfrac{1}{(2m+1)!}x^{2m+1}+R_{2M+1}(x)$, $R_{2M+1}(x)=\dfrac{\cosh\theta x}{(2M+1)!}\,x^{2M+1}$.

$M=3$ なら, $\sinh x=x+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}+R_7(x)$.

【補足】剰余項 $R_N(x)$ を評価して，(1) から (8) の関数は無限級数に表示できることが分かる但し, (4) から (6) では収束する x の範囲が制限される．

(1) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, (2) $\cos x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m}$, (3) $\sin x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1}$,

(4) $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \ (|x| < 1)$, (5) $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \ (-1 < x \leqslant 1)$,

(6) $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!!} x^n \ (-1 < x \leqslant 1)$,

(7) $\cosh x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{(2m)!}$, (8) $\sinh x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$.

5 (1) $x^p = \{1 + (x-1)\}^p = \sum_{n=0}^{p} \binom{p}{n} (x-1)^n$. $(R_N(x) = 0)$

(2) $\left(\frac{1}{x^p}\right)^{(n)} = (-p)(-p-1)\cdots(-p-n+1)\frac{1}{x^{p+n}} = (-1)^n p(p+1)\cdots(p+n-1)\frac{1}{x^{p+n}} = (-1)^n \frac{(n+p-1)!}{(p-1)!}\frac{1}{x^{p+n}}$

より, $\frac{1}{x^p} = \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n \binom{n+p-1}{n} (x-1)^n + R_N(x)$, $R_N(x) = \binom{N+p-1}{N} \frac{(-1)^N (x-1)^N}{\{1+\theta(x-1)\}^{N+p}}$ $(0 < \theta < 1)$.

6 (1) 最初に $\frac{d^n}{dx^n} f(-x) = (-1)^n f^{(n)}(-x)$ に注意する．

- $f(x)$ が奇関数のとき: $f(-x) = -f(x)$ の両辺を $2m$ 回微分して, $f^{(2m)}(-x) = -f^{(2m)}(x)$. これより $f^{(2m)}(0) = -f^{(2m)}(0)$, すなわち $f^{(2m)}(0) = 0$ が得られ, $a_{2m} = \frac{f^{(2m)}(0)}{(2m)!} = 0$.
- $f(x)$ が偶関数のとき: $f(-x) = f(x)$ の両辺を $2m+1$ 回微分して, $-f^{(2m+1)}(-x) = f^{(2m+1)}(x)$. これより $-f^{(2m+1)}(0) = f^{(2m+1)}(0)$, すなわち $f^{(2m+1)}(0) = 0$ が得られ, $a_{2m+1} = \frac{f^{(2m+1)}(0)}{(2m+1)!} = 0$.

(2) ① 明らか. ② $(1+x^2)f'(x) = 1$ の両辺を n 回 $(n \geqslant 1)$ 微分すると, Leibniz の公式により

$$(1+x^2)f^{(n+1)}(x) + n \cdot 2x f^{(n)}(x) + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 f^{(n-1)}(x) = 0.$$

これを整理して, $(1+x^2)f^{(n+1)}(x) + 2nx f^{(n)}(x) + n(n-1) f^{(n-1)}(x) = 0$.

③ $n = 2m-1$ $(m \geqslant 1)$ の場合の②の関係式に $x = 0$ を代入して, $f^{(2m+1)}(0) = -2m(2m-1)f^{(2m-1)}(0)$. この関係式を繰り返し用いて, $m \geqslant 1$ に対し

$$f^{(2m+1)}(0) = -2m(2m-1)f^{(2m-1)}(0) = \cdots = (-1)^m 2m(2m-1)\cdots 2 \cdot 1 \, f'(0) = (-1)^m (2m)!.$$

ここで, $f'(0) = 1$ を用いた. $0! = 1$ に注意すれば, $f^{(2m+1)}(0) = (-1)^m (2m)!$ $(m \geqslant 0)$.

④ $a_{2m+1} = \frac{f^{(2m+1)}(0)}{(2m+1)!} = \frac{(-1)^m (2m)!}{(2m+1)!} = \frac{(-1)^m}{2m+1}$.

【補足】 実は, $\mathrm{Tan}^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} x^{2m+1}$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$ が成り立つ.

(3) ① $f(x) = \tan x$ より, $f'(x) = 1 + \tan^2 x = 1 + f(x)^2$.

② $n \geqslant 1$ のとき $f'(x) = 1 + f(x)^2$ を n 回微分して, $f^{(n+1)}(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} f^{(n-j)}(x) f^{(j)}(x)$.$n = 0$ のときは $f'(x) = 1 + f(x)^2$.

③ $f^{(2k)}(0) = 0$ より,

$$f^{(2m+1)}(0) = \sum_{j=0}^{2m} \binom{2m}{j} f^{(2m-j)}(0) f^{(j)}(0) = \sum_{k=0}^{m-1} \binom{2m}{2k+1} f^{(2m-2k-1)}(0) f^{(2k+1)}(0) \quad (m \geqslant 1).$$

④ $a_{2m+1} = \frac{f^{(2m+1)}(0)}{(2m+1)!} = \frac{(2m)!}{(2m+1)!} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(2m-2k-1)}(0) f^{(2k+1)}(0)}{(2m-2k-1)!(2k+1)!} = \frac{1}{2m+1} \sum_{k=0}^{m-1} a_{2m-2k-1} a_{2k+1}$ $(m \geqslant 1)$.

⑤ $a_1 = f'(0) = 1$ と④の関係式を用いて,

$$a_1 = 1, \quad a_3 = \frac{1}{3} a_1^2 = \frac{1}{3}, \quad a_5 = \frac{1}{5}(a_3 a_1 + a_1 a_3) = \frac{2}{15}, \quad a_7 = \frac{1}{7}(a_5 a_1 + a_3^2 + a_1 a_5) = \frac{17}{315}.$$