# 数学演習第一　演習第 8 回

## 線形：正則行列，逆行列，2 次または 3 次の行列式

## 2020 年 7 月 15 日　実施

- 小テストの問題には番号の右肩に $^{テ}$ と書いてあります．次の 4 問です：$\boxed{2}$ (3), (4)　$\boxed{5}$ (1)　$\boxed{7}$ (4)
- レポート課題には番号の右肩に $^{レ}$ と書いてあります．次の 4 問です：$\boxed{2}$ (2), (5)　$\boxed{4}$ (2)　$\boxed{5}$ (3)
- 小テストの問題，レポート課題は 3 ページ目にまとめてあります．

**基礎的事項の確認**

**I**. $n$ 次正方行列 $A$ に対して $AB = BA = E_n$ ($E_n$ は $n$ 次単位行列) を満たす行列 $B$ が存在するとき，$A$ を**正則行列**または $A$ は**正則である**といい，$B$ を $A$ の**逆行列**という．

**II**. 正則行列 $A$ に対して，$A$ の逆行列はただ一つに定まる．$A$ の逆行列を $A^{-1}$ と書く．
(線形教科書 p.26)

**III**. $n$ 次正方行列 $A, B$ が $AB = E_n$ を満たせば，$A$ と $B$ はともに正則で互いに逆行列．
(線形教科書 p.59)

**IV**. $n$ 次正方行列 $A$ に対して，$[A \;\; E_n]$ の（行基本変形による）簡約行列が $[E_n \;\; B]$ となるならば，$A$ は正則であり $B = A^{-1}$ である．簡約行列の左側の行列が $E_n$ にならないとき，$A$ は正則でない．
(線形教科書 pp. 59–61)

**V**. 2 次正方行列の行列式は $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，3 次正方行列の行列式は

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

となる．(線形教科書 p.66)

**VI**. 平面ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の作る平行四辺形の面積は $|\boldsymbol{a} \;\; \boldsymbol{b}|$（行列式）の絶対値，空間ベクトル $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}$ の作る平行六面体の体積は $|\boldsymbol{p} \;\; \boldsymbol{q} \;\; \boldsymbol{r}|$（行列式）の絶対値で与えられる．（線形教科書 pp. 85–86）

$\boxed{\mathbf{1}}$ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $\widetilde{A} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$ とする．

(1) $|A|$ を求めよ．(ヒント：**V** を使う)

(2) $A\widetilde{A}$ を計算せよ．

(3) $|A| \neq 0$ のとき，$A$ は正則行列であることを示して $A^{-1}$ を求めよ．（ヒント：**III** を使う）

(4) $|AB| = |A||B|$ を示せ．（ヒント：両辺をそれぞれ計算する）

(5) $|A| \neq 0$ と $A$ が正則であることは同値であることを示せ．（ヒント：**I** と (4) を使う）

$\boxed{\mathbf{2}}$ 以下の行列が正則かどうか調べよ．さらに，正則であれば逆行列を求めよ．

(1) $\begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$　(2)$^{レ}$ $\begin{bmatrix} \lambda+3 & 4 \\ 2 & \lambda+5 \end{bmatrix}$　(3)$^{テ}$ $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

(4)$^{テ}$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$　(5)$^{レ}$ $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

（ヒント：$2 \times 2$ 行列には $\boxed{1}$ (3), (5) を使い，$n \times n$ 行列 ($n \geq 3$) には **IV** を使う）

$\boxed{\mathbf{3}}$ $2\times 2$ 行列 $A, B$ に対して，以下の (1) ～ (5) は成り立つか？成り立つ場合は証明し，成り立たない場合は反例（成り立たない行列の具体例）をあげよ．ただし，(1) において $\lambda$ は実数，(5) において $A$ は正則とする．

(1) $|\lambda A| = \lambda|A|$　(2) $|AB| = |BA|$　(3) $|A+B| = |A|+|B|$　(4) $|{}^tA| = |A|$　(5) $|A^{-1}| = |A|^{-1}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ $m$ 次正方行列 $A$, $m\times n$ 行列 $B$ に対して，$m\times(m+n)$ 行列 $[A\ \ B]$ に行基本変形を繰り返して $[E_m\ \ C]$ まで変形できれば，$A$ は正則であり $C = A^{-1}B$ が成り立つ（各自確認すること）．この事実を用いて

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

に対して以下の問いに答えよ．

(1) $AX = B$ を満たす 3 次正方行列 $X$ を求めよ．

(2)$^{レ}$ $YA = B$ を満たす 3 次正方行列 $Y$ を求めよ．（ヒント：転置をとる）

$\boxed{\mathbf{5}}$ 以下の行列式を求めよ．ただし，(2) については因数分解された形で答えよ．（ヒント：**V** を使う）

(1)$^{テ}$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ -1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}$　(3)$^{レ}$ $\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$

$\boxed{\mathbf{6}}$ 正方行列 $A$ が ${}^tAA = E$ を満たすとき，$A$ を**直交行列**という．**III** より直交行列は正則行列であり，$A^{-1} = {}^tA$ となることに注意せよ．

(1) $P = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ は直交行列であることを示せ．さらに，$P$ の逆行列を求めよ．

(2) $Q = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix}$ は直交行列であることを示せ．さらに，$Q$ の逆行列を求めよ．

(3) $\boxed{5}$ (3) の行列を $R$ とする．$r\sin\theta \neq 0$ とき，${}^tR$ の逆行列を求めよ．（ヒント：まず $R$ を $Q$ とある対角行列 $D$ の積で表す）

$\boxed{\mathbf{7}}$ 平面ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \end{bmatrix}$ および空間ベクトル $\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ に対して，以下の問いに答えよ．（ヒント：**VI** を使う）

(1) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の作る平行四辺形の面積 $S$ を求めよ．

(2) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の作る三角形の面積 $T$ を求めよ．

(3) $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}$ の作る平行六面体の体積 $V$ を求めよ．

(4)$^{テ}$ $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}$ の作る四面体の体積 $W$ を求めよ．

## 小テスト

**問 1** ($\boxed{2}$ (3)) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ について 正しいものをすべて選べ.

**【選択肢】**

1. 正則でない.
2. 正則であり逆行列の第 1 行は [0  1/2  -1/2] である.
3. 正則であり逆行列の対角成分の和は 0 である.
4. 正則であり逆行列の成分の中には 0 となる成分がある.

**問 2** ($\boxed{2}$ (4)) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ について 正しいものをすべて選べ.

**【選択肢】**

1. 正則でない .
2. 正則であり逆行列の第 1 行は [-4  2  1] である.
3. 正則であり逆行列の対角成分の和は -4 である.
4. 正則であり逆行列の成分の中には 0 となる成分がある.

**問 3** ($\boxed{5}$ (1)) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ の値を求めよ.

**【選択肢】** **1**. 0 **2**. 1 **3**. 2 **4**. 3

**問 4** ($\boxed{7}$ (4)) 空間ベクトル $\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ の作る四面体の体積を求めよ.

**【選択肢】** **1**. 10 **2**. -10 **3**. 5/3 **4**. -5/3

## レポート課題

- 問題が含まれていた箇所にある説明もよく読むこと.
- **答だけでなく, 計算の過程も**書くこと.
- **A4 用紙 1 枚**にまとめて提出（1 枚に収まらない場合は 2 枚でもよい).

**第 1 問** ($\boxed{2}$ (2)) 行列 $\begin{bmatrix} \lambda+3 & 4 \\ 2 & \lambda+5 \end{bmatrix}$ が正則かどうか調べよ．さらに，正則であれば逆行列を求めよ.

**第 2 問** ($\boxed{2}$ (5)) 行列 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ が正則かどうか調べよ．さらに，正則であれば逆行列を求めよ.

**第 3 問** ($\boxed{4}$ (2)) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ に対して，$YA = B$ を満たす 3 次正方行列 $Y$ を求めよ．（ヒント：転置をとる）

**第 4 問** ($\boxed{5}$ (3)) 行列式 $\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$ を求めよ.