数学演習第一（演習 第9回）

微積：漸近展開, 積分の計算 (1)

2020 年 7 月 22 日

小テスト の問題, **レポート課題** は 3 枚目にまとめて書かれています (レポート課題は * が付いた問題).

0 【確認問題】 空欄の中に適当な式を記入しながら, 今回の演習で必要となる予備知識を確認せよ.

ランダウの記号 (微積教科書 p.49 参照)

関数 $h(x)$ が $\displaystyle\lim_{x\to 0} \boxed{} = 0$ を満たすとき, $h(x) = o(x^n)$ $(x \to 0)$ と表す.

このとき, $x^m h(x) = o(x^{m+n})$ $(x \to 0)$ であることに注意 (微積教科書 p.50 定理 2.4.4 参照).

漸近展開の要点

関数 $f(x)$ の $x = 0$ における N 次の漸近展開を求めることとは,

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_Nx^N + o(x^N) \qquad (x \to 0)$$

となる x の多項式 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_Nx^N$ を求めることである (このような多項式が存在するなら係数は一意に定まる). $f(x)$ が $x = 0$ の周りで C^N 級であれば, 微積教科書 定理 2.4.5 より $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ $(n = 0, 1, \ldots, N)$ だから, (a)〜(d) に挙げる代表的な関数は, $x \to 0$ で次のように漸近展開される.

(a) $\displaystyle e^x = \sum_{n=0}^{N} \boxed{}\, x^n + o(x^N)$

(b) $\displaystyle \cos x = \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \boxed{}\, x^{2n} + o(x^N), \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \boxed{}\, x^{2n+1} + o(x^N)$

記号 $\lfloor a \rfloor$ は a 以下の最大整数 (例えば, $N_1 = \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$ は $2N_1 \leqslant N$ を満たす最大整数) を表す.

(c) $\displaystyle \log(1+x) = \sum_{n=1}^{N} \boxed{}\, x^n + o(x^N)$

(d) $\displaystyle (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{N} \binom{\alpha}{n} x^n + o(x^N)$ 但し, $\displaystyle \binom{\alpha}{0} = 1, \ \binom{\alpha}{n} = \boxed{}$ $(n = 1, 2, \ldots)$

特に, $\displaystyle \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{N} \boxed{}\, x^n + o(x^N)$ (微積教科書 p.46 問題 2.3 1 (3), p.151 例題 6.2.1 参照)

(a)〜(d) の関数を用いて表現される関数であっても, より複雑な関数 $f(x)$ に対しては, **$f^{(n)}(0)$ を直接計算するのは大変**になることが多い. しかし, $f^{(n)}(0)$ を直接計算しなくても, **(a)〜(d) の漸近展開を組み合わせる**ことで $x = 0$ における漸近展開を求めることができる.

例題 上の漸近展開を用いて, $\dfrac{1}{\cos x}$, $\tan x$, $\log(\cos x)$ の 5 次の漸近展開を求めよ.

[解] まず, (b) より $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)$, $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)$.

- $\dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{1}{1 + (-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5))}$ において, $\dfrac{1}{1+X} = 1 - X + X^2 + o(X^2)$ $(X \to 0)$ より,

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)\right) + \left(-\frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right)^2 + o(x^5) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^5).$$

- $\displaystyle \tan x = \frac{1}{\cos x} \cdot \sin x = \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^5)\right)\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)\right) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5).$

- $\displaystyle \log(\cos x) = \log\left(1 + \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)\right)\right)$ において, $\log(1+X) = X - \frac{1}{2}X^2 + o(X^2)$ $(X \to 0)$ より,

$$\log(\cos x) = \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right)^2 + o(x^5) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^5).$$

$\displaystyle \log(\cos x) = -\int_0^x \tan t\, dt$ を用いれば, $\displaystyle \log(\cos x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + o(x^6).$

$\boxed{1}$ (漸近展開)

次の関数の $x \to 0$ における漸近展開を指定された次数まで求めよ．ただし，$\displaystyle\int_0^x o(t^n)\,dt = o(x^{n+1})$ $(x \to 0)$ を用いてよい．

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ (2 次)　(2) $\sqrt{1+x}$ (2 次)　(3) $\cosh x,\ \sinh x$ (5 次)

(4) 2^x (2 次)　(5)* $\log(3+x)$ (2 次)　(6) $\dfrac{x}{2+x-x^2}$ (3 次)

(7) $\log\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ (5 次)　(8) $\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ (4 次)　(9) $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2$ (4 次)

(10)* $e^{-x}\cos x$ (3 次)　(11) $\dfrac{x}{\sin x}$ (4 次)　(12) $e^{\cos x}$ (4 次)

(13) $\mathrm{Tan}^{-1}\,x \left(= \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}\right)$ (5 次)　(14) $\mathrm{Sin}^{-1}\,x \left(= \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\right)$ (5 次)

【注意】 (10), (11), (12) 以外は N 次の漸近展開の形で求められるので，余力のある人は是非試してもらいたい ((1), (2), (14) では 2 重階乗を用いる)．なお，偶関数なら $2N$ 次，奇関数なら $2N+1$ 次の漸近展開の形で考えるのが自然．

$\boxed{2}$ (漸近展開の応用)

(1) 漸近展開を利用して次の極限値を求めよ．

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2 x}\right)$　(ii)* $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x) - x\sqrt{1-x}}{x(1-\cos x)}$

(2) $y = x^{\frac{1}{3}}(3-x)^{\frac{2}{3}}$ の $x \to \pm\infty$ における漸近線 $y = ax+b$ を求めよ．

(**ヒント**: $x^{\frac{1}{3}}(3-x)^{\frac{2}{3}} = x(1-\frac{3}{x})^{\frac{2}{3}}$ と変形できるので，$(1+t)^{\frac{2}{3}}$ の $t \to 0$ での漸近展開を調べればよい.)

(3) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ の $n \to \infty$ における漸近展開 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = a_0 + \dfrac{a_1}{n} + \dfrac{a_2}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ を求めよ．

(**ヒント**: $x = 1/n$ とおき，$(1+x)^{1/x} = e^{\log(1+x)/x} = e^{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)}$ の $x \to 0$ での漸近展開を考えよ.)

$\boxed{3}$ (高校程度の積分計算の復習)

(1) 次の不定積分・定積分を求めよ．

(i) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$　(ii) $\displaystyle\int x^2 \log x\,dx$

(iii) $\displaystyle\int x^3 e^{-x^2}\,dx$　(iv) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$

(v)* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x\,dx$　(vi) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-x}\sin x\,dx$

(vii) $\displaystyle\int_0^{\pi} |\sin x + \cos x|\,dx$　(viii) $\displaystyle\int_0^{\pi} (\sin mx)(\cos nx)\,dx$　(m, n は自然数)

(2) 次の定積分で表された関数の導関数を求めよ．

(i) $f(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\log t}$　$(x > 1)$　(ii) $g(x) = \displaystyle\int_0^x (x-t)\sin t\,dt$

小テスト $e^x,\ \cos x,\ \sin x,\ \log(1+x)$ の漸近展開に関する問題です.

問 1 次のうちで, $x \to 0$ における漸近展開の 1 次の項が x であるものをすべて挙げよ.

(ア) e^x **(イ)** $\sin x$ **(ウ)** $\cos x$ **(エ)** $\log(1+x)$

[選択肢] 1. **(ア)** 2. **(イ)** 3. **(ウ)** 4. **(エ)**

問 2 次のうちで, $x \to 0$ における漸近展開の 2 次の項が $-\dfrac{x^2}{2}$ であるものをすべて挙げよ.

(ア) e^{-x} **(イ)** $\sin x$ **(ウ)** $\cos x$ **(エ)** $\log(1-x)$

[選択肢] 1. **(ア)** 2. **(イ)** 3. **(ウ)** 4. **(エ)**

問 3 次のうちで, $x \to 0$ における漸近展開の 3 次の項が $-\dfrac{x^3}{6}$ であるものをすべて挙げよ.

(ア) e^{-x} **(イ)** $\sin x$ **(ウ)** $\cos x$ **(エ)** $\log\sqrt{1-x}$

[選択肢] 1. **(ア)** 2. **(イ)** 3. **(ウ)** 4. **(エ)**

問 4 次のうちで, $x \to 0$ における漸近展開の 4 次の項が $\dfrac{x^4}{24}$ であるものをすべて挙げよ.

(ア) e^x **(イ)** $\sin x$ **(ウ)** $\cos x$ **(エ)** $\log\sqrt[6]{1+x}$

[選択肢] 1. **(ア)** 2. **(イ)** 3. **(ウ)** 4. **(エ)**

レポート課題 **答だけでなく, 計算の過程も**書いて下さい. (**A4 用紙 1 枚**にまとめて提出)
1 枚に収まらない場合は 2 枚でもよい

第 1 問 ($\boxed{1}$(5)) $\log(3+x)$ の $x \to 0$ における漸近展開を 2 次の項まで求めよ. すなわち,
$\log(3+x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + o(x^2)$ の形に漸近展開せよ.

第 2 問 ($\boxed{1}$(10)) $e^{-x}\cos x$ の $x \to 0$ における漸近展開を 3 次の項まで求めよ.

第 3 問 ($\boxed{2}$(1)(ii)) 漸近展開を利用して極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x) - x\sqrt{1-x}}{x(1-\cos x)}$ を求めよ.

第 4 問 ($\boxed{3}$(1)(v)) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x\,dx$ を求めよ.