数学演習第一（演習第 10 回）【解答例】

線形： 4 次以上の行列式　　2020 年 7 月 29 日

【小テスト，レポート課題の解答】

$\boxed{1}$ **(小テストの解答)**

(1) $\begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ 2\mathbf{b} \\ \mathbf{c}-\mathbf{a} \\ \mathbf{d} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ 2\mathbf{b} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \end{vmatrix} = 2\,|A| = -8.$ 答は **(ア)**.

(2) $\begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ -3\mathbf{a}-\mathbf{b} \\ 2\mathbf{a}-\mathbf{b}+3\mathbf{c} \\ \mathbf{a}-2\mathbf{b}-\mathbf{c}+2\mathbf{d} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ -\mathbf{b} \\ -\mathbf{b}+3\mathbf{c} \\ -2\mathbf{b}-\mathbf{c}+2\mathbf{d} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ -\mathbf{b} \\ 3\mathbf{c} \\ -\mathbf{c}+2\mathbf{d} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ -\mathbf{b} \\ 3\mathbf{c} \\ 2\mathbf{d} \end{vmatrix} = -6\,|A| = 24.$ 答は **(エ)**.

(3) $|3\,{}^tA| = 3^4\,|{}^tA| = 81\,|A| = -324.$ 答は **(イ)**.

(4) $|AB^{-1}| = |A|\,|B^{-1}| = \dfrac{|A|}{|B|} = -\dfrac{4}{3}.$ 答は **(ウ)**.

$\boxed{2}$ **(レポート課題の解答)**

(1) $$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 8 & 7 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 7 & -9 \\ 0 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -9 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -21+36 = \boxed{15}.$$

(2) $$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 7 \\ 4 & 5 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 10 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \boxed{-3}.$$

(3) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 0 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & -7 \\ 0 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -4 & -2 & -7 \\ 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -10 & 1 \\ 0 & 4 & -9 \end{vmatrix} = 90-4 = \boxed{86}.$$

(4) $|A_{11}| = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 23,\quad |A_{21}| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 14,\quad |A_{31}| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -1,$

$|A_{12}| = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -14,\quad |A_{22}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0,\quad |A_{32}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 7,$

$|A_{13}| = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -8,\quad |A_{23}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7,\quad |A_{33}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 11$

であるので，$\widetilde{A} = \boxed{\begin{bmatrix} 23 & -14 & -1 \\ 14 & 0 & -7 \\ -8 & 7 & 11 \end{bmatrix}}.$

【それ以外の問題の解答】

3

(1) $\begin{vmatrix} 0&1&2&3\\1&2&3&0\\2&3&0&1\\3&0&1&2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1&2&3&0\\0&1&2&3\\2&3&0&1\\3&0&1&2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1&2&3&0\\0&1&2&3\\0&-1&-6&1\\0&-6&-8&2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1&2&3\\-1&-6&1\\-6&-8&2 \end{vmatrix}$

$= -\begin{vmatrix} 1&2&3\\0&-4&4\\0&4&20 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -4&4\\4&20 \end{vmatrix} = 16\begin{vmatrix} 1&-1\\1&5 \end{vmatrix} = 96.$

(2) $\begin{vmatrix} 1&2&3&4\\12&13&14&5\\11&16&15&6\\10&9&8&7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1&2&1&4\\12&13&1&5\\11&16&-1&6\\10&9&-1&7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1&2&1&4\\11&11&0&1\\12&18&0&10\\11&11&0&11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11&11&1\\12&18&10\\11&11&11 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 11&11&1\\12&18&10\\0&0&10 \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} 11&11\\12&18 \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} 11&0\\12&6 \end{vmatrix} = 660.$

(3) $\begin{vmatrix} 2&8&4&1\\7&6&7&1\\2&4&4&0\\1&2&5&1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1&6&-1&0\\6&4&2&0\\2&4&4&0\\1&2&5&1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1&6&-1\\6&4&2\\2&4&4 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1&6&-1\\3&2&1\\1&2&2 \end{vmatrix} = 8\begin{vmatrix} 1&3&-1\\3&1&1\\1&1&2 \end{vmatrix}$

$= 8\begin{vmatrix} 1&3&-1\\0&-8&4\\0&-2&3 \end{vmatrix} = 8\begin{vmatrix} -8&4\\-2&3 \end{vmatrix} = 32\begin{vmatrix} -2&1\\-2&3 \end{vmatrix} = 32\begin{vmatrix} -2&1\\0&2 \end{vmatrix} = -128.$

(4) $\begin{vmatrix} 2&-1&3&-2\\1&7&1&-1\\3&5&-5&3\\4&-3&2&-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2&-1&3&0\\1&7&1&0\\3&5&-5&6\\4&-3&2&3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2&-1&3&0\\1&7&1&0\\3&5&-5&2\\4&-3&2&1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2&-1&3&0\\1&7&1&0\\-5&11&-9&0\\4&-3&2&1 \end{vmatrix}$

$= 3\begin{vmatrix} 2&-1&3\\1&7&1\\-5&11&-9 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2&-1&1\\1&7&0\\-5&11&-4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2&-1&1\\1&7&0\\3&7&0 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1&7\\3&7 \end{vmatrix} = 21\begin{vmatrix} 1&1\\3&1 \end{vmatrix} = -42.$

4

(1) $|dE| = d^n|E| = d^n$.

(2) 恒等式 $A\widetilde{A} = |A|E$ の両辺の行列式をとって $|A\widetilde{A}| = \big||A|E\big|$．これより，$|A||\widetilde{A}| = |A|^n$．両辺を 0 でない多項式 $|A|$ で割り算して，$|\widetilde{A}| = |A|^{n-1}$．($A = [a_{ij}]$ とすると，$\widetilde{A}$ の各成分は n^2 個の変数 a_{ij} の多項式で，$|A|$, $|\widetilde{A}|$ ともに，n^2 個の変数 a_{ij} の多項式である．よって，上記のように，$|\widetilde{A}|$ と $|A|^{n-1}$ は，まず n^2 個の変数 a_{ij} の多項式として等しいことがわかり，従って，n^2 個の変数 a_{ij} にどんな値をいれても等しいことがわかる.)

【別法】 A が正則なら, $|A||\widetilde{A}| = |A|^n$ を $|A| \neq 0$ で割って, $|\widetilde{A}| = |A|^{n-1}$. A が正則でないとき, $\widetilde{A}$ が正則と仮定すれば, $A\widetilde{A} = |A|E$ より $A = O$. このとき, 定義により $\widetilde{A} = O$ となり, 矛盾. よって, $|A| = 0 \Rightarrow |\widetilde{A}| = 0$ となるので, この場合も含めて, $|\widetilde{A}| = |A|^{n-1}$ が成立する.

5

関係式 $w\boldsymbol{a} + x\boldsymbol{b} + y\boldsymbol{c} + z\boldsymbol{d} = t\boldsymbol{e}$ は w, x, y, z を変数とする連立 1 次方程式 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w\\x\\y\\z \end{bmatrix} = t\boldsymbol{e}$ と見なせるので，クラメルの公式より，

$w = \dfrac{|t\boldsymbol{e}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}\ \boldsymbol{d}|}{|\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}\ \boldsymbol{d}|} = \dfrac{t\,|\boldsymbol{e}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}\ \boldsymbol{d}|}{|\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}\ \boldsymbol{d}|} = \dfrac{4t}{2} = 2t,$

$x = \dfrac{|\boldsymbol{a}\ t\boldsymbol{e}\ \boldsymbol{c}\ \boldsymbol{d}|}{|\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}\ \boldsymbol{d}|} = \dfrac{-4t}{2} = -2t,\ \ y = \dfrac{|\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ t\boldsymbol{e}\ \boldsymbol{d}|}{|\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}\ \boldsymbol{d}|} = \dfrac{-2t}{2} = -t,\ \ z = \dfrac{|\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}\ t\boldsymbol{e}|}{|\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}\ \boldsymbol{d}|} = \dfrac{-6t}{2} = -3t.$

$\boxed{6}$ (1) $|P_2| = \begin{vmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{vmatrix} = 1$ である．$n \geq 2$ なる自然数に対し，$\begin{vmatrix} P_n{}' \\ \mathbf{p}_n \end{vmatrix} = |P_n| = 1$ を仮定すると，

$$|P_{n+1}| = \begin{vmatrix} E_{n-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cos\theta_n & -\sin\theta_n \\ \mathbf{0} & \sin\theta_n & \cos\theta_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} P_n{}' & \mathbf{0} \\ \mathbf{p}_n & 0 \\ \mathbf{0} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta_n & -\sin\theta_n \\ \sin\theta_n & \cos\theta_n \end{vmatrix} |P_n| = 1 \cdot 1 = 1$$

となる．故に，帰納法により $n \geq 2$ なる自然数に対し $|P_n| = 1$ である．特に $|P_4| = 1$.

【補足】 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos\theta_1 \\ r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ \vdots \\ r\sin\theta_1 \cdots \sin\theta_{n-3}\cos\theta_{n-2} \\ r\sin\theta_1 \cdots\cdots\cdots\cdots \sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} \\ r\sin\theta_1 \cdots\cdots\cdots\cdots \sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1} \end{bmatrix}$ を n 次元での極座標変換とし，$n \geq 2$ に対し，$\widetilde{x}_{n-1} = r\sin\theta_1 \cdots \sin\theta_{n-2}$ とするとき，$x_{n-1} = \widetilde{x}_{n-1}\cos\theta_{n-1}$, $x_n = \widetilde{x}_{n-1}\sin\theta_{n-1}$ だから，

$$\begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_{n-2} \\ dx_{n-1} \\ dx_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_{n-2} \\ \cos\theta_{n-1}d\widetilde{x}_{n-1} - \widetilde{x}_{n-1}\sin\theta_{n-1}d\theta_{n-1} \\ \sin\theta_{n-1}d\widetilde{x}_{n-1} + \widetilde{x}_{n-1}\cos\theta_{n-1}d\theta_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} E_{n-2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cos\theta_{n-1} & -\sin\theta_{n-1} \\ \mathbf{0} & \sin\theta_{n-1} & \cos\theta_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_{n-2} \\ d\widetilde{x}_{n-1} \\ \widetilde{x}_{n-1}d\theta_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$= P_n \begin{bmatrix} dr \\ rd\theta_1 \\ \vdots \\ r\sin\theta_1 \cdots \sin\theta_{n-3}d\theta_{n-2} \\ r\sin\theta_1 \cdots \sin\theta_{n-3}\sin\theta_{n-2}d\theta_{n-1} \end{bmatrix}$$

という形で P_n は現れる．(dx_i や dr, $d\theta_i$ などは後期の微分積分学第二で学ぶ (全) 微分である．) 最後の等号は帰納的にわかるものであり，$\widetilde{x}_1 = r$ に注意する．)

(2) 求める多項式を $f_n(x)$ とする．一行目で余因子展開して，$f_n(x) = (x^2+1)f_{n-1}(x) - x^2 f_{n-2}(x)$ という漸化式を得る．$f_1(x) = x^2+1$ であり，$f_2(x) = (x^2+1)^2 - x^2 = x^4 + x^2 + 1$ である．$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^{2k}$ であることを数学的帰納法により示す．$n \leq 2$ のとき，確かに成り立つ．$n \geq 3$ として，$f_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^{2k}$，$f_{n-2}(x) = \sum_{k=0}^{n-2} x^{2k}$ とする．このとき，

$$f_n(x) = (x^2+1)f_{n-1}(x) - x^2 f_{n-2}(x) = (x^2+1)\sum_{k=0}^{n-1} x^{2k} - x^2 \sum_{k=0}^{n-2} x^{2k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} x^{2k} + x^2 \cdot x^{2(n-1)} = \sum_{k=0}^{n} x^{2k}$$

より n のときも確かに成り立つ．故に，$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^{2k} = x^{2n} + x^{2(n-1)} + \cdots + x^2 + 1$.