数学演習第一　演習第 11 回【解答例】

微積：積分の計算 (2)

2020 年 8 月 12 日　実施

【注】この解答例では不定積分の積分定数を省略した．

1 (1) $x = a\tan\theta\ (-\pi/2 < \theta < \pi/2)$ と置換すると，$dx = \dfrac{a}{\cos^2\theta}\,d\theta$ より，

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \int \frac{1}{a^2(1+\tan^2\theta)} \cdot \frac{a}{\cos^2\theta}\,d\theta = \frac{\theta}{a} = \frac{1}{a}\,\mathrm{Tan}^{-1}\frac{x}{a}.$$

(2) $\dfrac{1}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\left(\dfrac{1}{x-a} - \dfrac{1}{x+a}\right)$ より，$\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)dx = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right|.$

(3) $\sqrt{x^2+A} = t - x$ と置換する．両辺を 2 乗すると x^2 の項が消えて $x = \dfrac{t^2-A}{2t}$ となるので，$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{t^2+A}{2t^2}$，$\sqrt{x^2+A} = t - x = \dfrac{t^2+A}{2t}$．よって，

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}} = \int \frac{1}{\frac{t^2+A}{2t}} \cdot \frac{t^2+A}{2t^2}\,dt = \int \frac{dt}{t} = \log|t| = \log|x + \sqrt{x^2+A}\,|.$$

(4) $x = at$ と置換すると，$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{a\,dt}{a\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \mathrm{Sin}^{-1}\,t = \mathrm{Sin}^{-1}\frac{x}{a}.$

(5) 部分積分により，$\displaystyle\int \sqrt{x^2+A}\,dx = \int x'\sqrt{x^2+A}\,dx = x\sqrt{x^2+A} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+A}}\,dx$ となる．ここで，$\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+A}}\,dx = \int \frac{(x^2+A)-A}{\sqrt{x^2+A}}\,dx = \int \sqrt{x^2+A}\,dx - A\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+A}}$ であるから，

$$2\int \sqrt{x^2+A}\,dx = x\sqrt{x^2+A} + A\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}} \overset{\boxed{1}(3)}{=} x\sqrt{x^2+A} + A\log|x+\sqrt{x^2+A}\,|.$$

よって，$\displaystyle\int \sqrt{x^2+A}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+A} + A\log|x+\sqrt{x^2+A}\,|\right).$

(6) (5) と同様な論法により，$\displaystyle 2\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \overset{\boxed{1}(4)}{=} x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\,\mathrm{Sin}^{-1}\frac{x}{a}.$
よって，$\displaystyle\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\,\mathrm{Sin}^{-1}\frac{x}{a}\right).$

(7) 部分積分により，$\displaystyle\int \mathrm{Sin}^{-1}x\,dx = \int x'\,\mathrm{Sin}^{-1}x\,dx = x\,\mathrm{Sin}^{-1}x - \int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$．ここで，$\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\int(\sqrt{1-x^2}\,)'\,dx = -\sqrt{1-x^2}$ であるから，$\displaystyle\int\mathrm{Sin}^{-1}x\,dx = x\,\mathrm{Sin}^{-1}x + \sqrt{1-x^2}.$

(8) 部分積分により，$\displaystyle\int\mathrm{Tan}^{-1}x\,dx = \int x'\,\mathrm{Tan}^{-1}x\,dx = x\,\mathrm{Tan}^{-1}x - \int\frac{x}{1+x^2}\,dx$．ここで，$\displaystyle\int\frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int(\log(1+x^2))'\,dx = \frac{1}{2}\log(1+x^2)$ であるから，$\displaystyle\int\mathrm{Tan}^{-1}x\,dx = x\,\mathrm{Tan}^{-1}x - \frac{1}{2}\log(1+x^2).$

2 (1) $\dfrac{x+1}{x^2+2x-63} = \dfrac{x+1}{(x-7)(x+9)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-7} + \dfrac{1}{x+9}\right)$ と分解して，

$$\int\frac{x+1}{x^2+2x-63}\,dx = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-7}+\frac{1}{x+9}\right)dx = \frac{1}{2}\log|(x-7)(x+9)|.$$

(2) $\dfrac{1}{x^4-16} = \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{1}{x^2-4} - \dfrac{1}{x^2+4}\right) = \dfrac{1}{8}\left\{\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x+2}\right) - \dfrac{1}{x^2+4}\right\}$ と分解できる．$\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+4} = \int\frac{dx}{x^2+2^2} \overset{\boxed{1}(1)}{=} \frac{1}{2}\,\mathrm{Tan}^{-1}\frac{x}{2}$ であるから，$\displaystyle\int\frac{dx}{x^4-16} = \frac{1}{32}\log\left|\frac{x-2}{x+2}\right| - \frac{1}{16}\,\mathrm{Tan}^{-1}\frac{x}{2}.$

(3) $\dfrac{2x^2+1}{x^2+2} = \dfrac{2(x^2+2)-3}{x^2+2} = 2 - \dfrac{3}{x^2+2}$ より，$\displaystyle\int\frac{2x^2+1}{x^2+2}\,dx = 2x - 3\int\frac{dx}{x^2+2} \overset{\boxed{1}(1)}{=} 2x - \frac{3}{\sqrt{2}}\,\mathrm{Tan}^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}}.$

(4) $\dfrac{3x^3+x}{x^2+3}=\dfrac{x\{3(x^2+3)-8\}}{x^2+3}=3x-\dfrac{8x}{x^2+3}=3x-\dfrac{4(x^2+3)'}{x^2+3}$ より，$\displaystyle\int\frac{3x^3+x}{x^2+3}\,dx=\frac{3}{2}x^2-4\log(x^2+3)$.

(5) 分母を $x^4+4=(x^2+2)^2-4x^2=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$ と因数分解すれば,

$$\frac{x^2+2}{x^4+4}=\frac{x^2+2}{(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2+2x+2}+\frac{1}{x^2-2x+2}\right).$$

ここで，$\displaystyle\int\frac{dx}{x^2\pm 2x+2}=\int\frac{dx}{(x\pm1)^2+1}\overset{\boxed{1}(1)}{=}\mathrm{Tan}^{-1}(x\pm1)$ (複号同順) であるから，$\displaystyle\int\frac{x^2+2}{x^4+4}\,dx=\frac{1}{2}\left\{\mathrm{Tan}^{-1}(x+1)+\mathrm{Tan}^{-1}(x-1)\right\}$.

(6) $\dfrac{x(x^2+3)}{(x^2-1)(x^2+1)^2}=\dfrac{x}{x^2-1}-\dfrac{x(x^2+2)}{(x^2+1)^2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}\right)-\dfrac{x}{x^2+1}-\dfrac{x}{(x^2+1)^2}$ と分解する．いま,

$\displaystyle\int\frac{x}{x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\log(x^2+1)$, $\displaystyle\int\frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}\,dx=-\frac{1}{2(x^2+1)}$

なので，$\displaystyle\int\frac{x(x^2+3)}{(x^2-1)(x^2+1)^2}\,dx=\frac{1}{2}\log|(x-1)(x+1)|-\frac{1}{2}\log(x^2+1)+\frac{1}{2(x^2+1)}=\frac{1}{2}\log\frac{|x^2-1|}{x^2+1}+\frac{1}{2(x^2+1)}$.

3 (1) $\sqrt{1+x}=t$ と置換すると，$dx=2t\,dt$ なので,

$$\int\frac{\sqrt{1+x}}{x}\,dx=\int\frac{2t^2}{t^2-1}\,dt=\int\frac{2(t^2-1)+2}{t^2-1}\,dt=\int\left(2+\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$
$$=2t+\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|=2\sqrt{1+x}+\log\left|\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}\right|.$$

(2) $\sqrt{\dfrac{2+x}{2-x}}=t$ と置換すると，$x=2-\dfrac{4}{t^2+1}$，$dx=\dfrac{8t}{(t^2+1)^2}\,dt$ なので,

$$\int\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\,dx=\int\frac{8t^2}{(t^2+1)^2}\,dt=-\int 4t\cdot\left(\frac{1}{t^2+1}\right)'dt=-\frac{4t}{t^2+1}+4\int\frac{dt}{t^2+1}$$
$$=-\frac{4t}{t^2+1}+4\,\mathrm{Tan}^{-1}t=-\sqrt{4-x^2}+4\,\mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}.$$

ここで, 不定積分 $\displaystyle\int\frac{8t^2}{(t^2+1)^2}\,dt$ は $t=\tan\theta$ と置換しても計算できる．実際, このとき, $dt=\dfrac{d\theta}{\cos^2\theta}$ より,

$$\int\frac{8t^2}{(t^2+1)^2}\,dt=\int\frac{8\tan^2\theta}{(1+\tan^2\theta)^2}\frac{d\theta}{\cos^2\theta}=\int\frac{8\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\,d\theta=\int 8\sin^2\theta\,d\theta=\int 4(1-\cos2\theta)\,d\theta$$
$$=4\theta-2\sin2\theta=4\theta-4\sin\theta\cos\theta=4\theta-4\tan\theta\cos^2\theta=4\,\mathrm{Tan}^{-1}t-\frac{4t}{1+t^2}.$$

【別法 1】$\displaystyle\int\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\,dx=\int\frac{2+x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx=\int\left(\frac{2}{\sqrt{2^2-x^2}}-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\right)dx=2\,\mathrm{Sin}^{-1}\frac{x}{2}-\sqrt{4-x^2}$.

【別法 2】被積分関数の定義域が $-2\le x<2$ であることに注意して, $x=2\sin t$ $(-\pi/2\le t<\pi/2)$ と置換する．このとき, $\sqrt{\dfrac{2+x}{2-x}}=\sqrt{\dfrac{1+\sin t}{1-\sin t}}=\sqrt{\dfrac{1-\sin^2 t}{(1-\sin t)^2}}=\dfrac{\cos t}{1-\sin t}$, $dx=2\cos t\,dt$ であるから,

$$\int\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\,dx=\int\frac{\cos t}{1-\sin t}\cdot2\cos t\,dt=2\int(1+\sin t)\,dt=2t-2\cos t$$
$$=2t-2\sqrt{1-\sin^2 t}=2\,\mathrm{Sin}^{-1}\frac{x}{2}-\sqrt{4-x^2}.$$

【別法 3】$\sqrt{2+x}=t$ と置換すると, $x=t^2-2$, $dx=2t\,dt$, $\sqrt{\dfrac{2+x}{2-x}}=\dfrac{t}{\sqrt{4-t^2}}$ より,

$$\int\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\,dx=\int\frac{2t^2}{\sqrt{4-t^2}}\,dt=\int\frac{8-2(4-t^2)}{\sqrt{4-t^2}}\,dt=8\int\frac{dt}{\sqrt{4-t^2}}\,dt-2\int\sqrt{4-t^2}\,dt$$
$$=8\,\mathrm{Sin}^{-1}\frac{t}{2}-\left(t\sqrt{4-t^2}+4\,\mathrm{Sin}^{-1}\frac{t}{2}\right)=-\sqrt{4-x^2}+4\,\mathrm{Sin}^{-1}\frac{\sqrt{2+x}}{2}.$$

【別法 4】$\sqrt{2-x}=t$ と置換すると, $x=2-t^2$, $dx=-2t\,dt$, $\sqrt{\dfrac{2+x}{2-x}}=\dfrac{\sqrt{4-t^2}}{t}$ より,

$$\int\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\,dx=\int\frac{\sqrt{4-t^2}}{t}\cdot(-2t)\,dt=-2\int\sqrt{4-t^2}\,dt$$
$$=-\left(t\sqrt{4-t^2}+4\,\mathrm{Sin}^{-1}\frac{t}{2}\right)=-\sqrt{4-x^2}-4\,\mathrm{Sin}^{-1}\frac{\sqrt{2-x}}{2}.$$

【別法 5】$\sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}=t$ と置換すると，$x=-2+\dfrac{4}{t^2+1}$，$dx=\dfrac{-8t}{(t^2+1)^2}\,dt$ なので,

$$\int\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\,dx=\int\frac{1}{t}\cdot\frac{-8t}{(t^2+1)^2}\,dt=-8\int\frac{(t^2+1)-t^2}{(t^2+1)^2}\,dt\quad(t=\tan\theta\text{ と置換してもよい})$$
$$=-4\int\left\{\frac{2}{t^2+1}+t\cdot\left(\frac{1}{t^2+1}\right)'\right\}dt=-4\left(2\,\mathrm{Tan}^{-1}\,t+t\cdot\frac{1}{t^2+1}-\int\frac{dt}{t^2+1}\right)$$
$$=\frac{4t}{t^2+1}-4\,\mathrm{Tan}^{-1}\,t=-\sqrt{4-x^2}-4\,\mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}.$$

《注意》何通りかの方法を紹介したが, 各不定積分に現れる関数の間には次の関係がある:

$$\mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}=\mathrm{Sin}^{-1}\frac{\sqrt{2+x}}{2}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\mathrm{Sin}^{-1}\frac{x}{2},$$
$$\mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}=\mathrm{Sin}^{-1}\frac{\sqrt{2-x}}{2}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\mathrm{Sin}^{-1}\frac{x}{2}.$$

(3) $\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}\,x$ と置換すると，$x=\dfrac{t^2-c}{2\sqrt{a}\,t+b}$ であるから，$dx=\dfrac{2(\sqrt{a}\,t^2+bt+\sqrt{a}\,c)}{(2\sqrt{a}\,t+b)^2}\,dt$, $\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}\,x=\dfrac{\sqrt{a}\,t^2+bt+\sqrt{a}\,c}{2\sqrt{a}\,t+b}$. よって,

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}=\int\frac{1}{\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}\,t+b}\cdot\frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+\sqrt{a}\,c}{2\sqrt{a}\,t+b}}\cdot\frac{2(\sqrt{a}\,t^2+bt+\sqrt{a}\,c)}{(2\sqrt{a}\,t+b)^2}\,dt=2\int\frac{dt}{t^2-c}.$$

ここで，$c>0$ のとき $\displaystyle\int\frac{dt}{t^2-c}=\frac{1}{2\sqrt{c}}\int\left(\frac{1}{t-\sqrt{c}}+\frac{1}{t+\sqrt{c}}\right)dt=\frac{1}{2\sqrt{c}}\log\left|\frac{t-\sqrt{c}}{t+\sqrt{c}}\right|$，$c=0$ のとき $\displaystyle\int\frac{dt}{t^2-c}=-\frac{1}{t}$，$c<0$ のとき $\displaystyle\int\frac{dt}{t^2-c}=\int\frac{dt}{t^2+(\sqrt{|c|}\,)^2}=\frac{1}{\sqrt{|c|}}\mathrm{Tan}^{-1}\frac{t}{\sqrt{|c|}}$ なので,

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{c}}\log\left|\dfrac{\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{a}\,x-\sqrt{c}}{\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{a}\,x+\sqrt{c}}\right| & (c>0),\\ -\dfrac{2}{\sqrt{ax^2+bx}+\sqrt{a}\,x} & (c=0),\\ \dfrac{2}{\sqrt{|c|}}\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{a}\,x}{\sqrt{|c|}} & (c<0).\end{cases}$$

4 (1) $\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$ なので，$\sin^4 x=\dfrac{1}{4}(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)=\dfrac{1}{4}\left(1-2\cos 2x+\dfrac{1+\cos 4x}{2}\right)=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3}{2}-2\cos 2x+\dfrac{1}{2}\cos 4x\right)$. よって，$\displaystyle\int\sin^4 x\,dx=\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x.$

(2) $\tan\dfrac{x}{2}=t$ と置換すると，$\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$，$dx=\dfrac{2}{1+t^2}\,dt$ より,

$$\int\frac{dx}{4+3\cos x}=\int\frac{1}{4+3\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt=2\int\frac{dt}{7+t^2}=\frac{2}{\sqrt{7}}\mathrm{Tan}^{-1}\frac{t}{\sqrt{7}}=\frac{2}{\sqrt{7}}\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\tan\frac{x}{2}\right).$$

(3) $t=\tan x$ と置換すると，$\cos^2 x=\dfrac{1}{1+t^2}$，$\sin^2 x=\dfrac{t^2}{1+t^2}$，$dx=\dfrac{dt}{1+t^2}$ なので,

$$\int\frac{dx}{\cos^2 x+4\sin^2 x}=\int\frac{1}{\frac{1}{1+t^2}+\frac{4t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{dt}{1+t^2}=\int\frac{dt}{1+4t^2}=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+t^2}=\frac{1}{2}\mathrm{Tan}^{-1}\,2t$$
$$=\frac{1}{2}\mathrm{Tan}^{-1}(2\tan x).$$

5 (1) $\sqrt{x-1}=t$ と置換すると，$x=t^2+1$，$dx=2t\,dt$ なので，

$$\int_1^2 \frac{dx}{x+\sqrt{x-1}} = \int_0^1 \frac{2t}{t^2+t+1}\,dt = \int_0^1 \frac{(t^2+t+1)'-1}{t^2+t+1}\,dt.$$

ここで，$\displaystyle\int_0^1 \frac{(t^2+t+1)'}{t^2+t+1}\,dt = \Big[\log(t^2+t+1)\Big]_0^1 = \log 3$ であり，

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^2+t+1} = \int_0^1 \frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} \overset{t+\frac{1}{2}=s}{=} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{ds}{s^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,\frac{2s}{\sqrt{3}}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

よって，$\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x+\sqrt{x-1}} = \log 3 - \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{Tan}^{-1}\,x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \{(\mathrm{Tan}^{-1}\,x)^2\}'\,dx = \frac{1}{2}\Big[(\mathrm{Tan}^{-1}\,x)^2\Big]_0^1 = \frac{\pi^2}{32}.$

(3) $\tan\dfrac{x}{2}=t$ と置換すると，$\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$，$dx=\dfrac{2}{1+t^2}\,dt$ なので，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{4+5\sin x} = \int_0^1 \frac{1}{4+5\cdot\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int_0^1 \frac{dt}{2t^2+5t+2} = \frac{1}{3}\int_0^1 \left(\frac{2}{2t+1}-\frac{1}{t+2}\right)dt$$

$$= \frac{1}{3}\left[\log\frac{2t+1}{t+2}\right]_0^1 = \frac{1}{3}\log 2. \qquad (0\le t\le 1 \text{ においては}, 2t+1>0,\ t+2>0)$$

6 (1) $0<x\le\dfrac{\pi}{2}$ において，$\dfrac{2}{\pi}x \le \sin x \le x$ なので，$\dfrac{1}{x^p} \le \dfrac{1}{(\sin x)^p} \le \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^p\dfrac{1}{x^p}$．$0<\varepsilon<1$ に対して

$$\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{1}{1-p}\{(\frac{\pi}{2})^{1-p}-\varepsilon^{1-p}\} & (0<p\ne 1) \\ \log\frac{\pi}{2\varepsilon} & (p=1) \end{cases} \quad \text{より，} \quad \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{1}{1-p}(\frac{\pi}{2})^{1-p} & (0<p<1) \\ \infty & (p\ge 1) \end{cases}$$

となる．よって，広義積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(\sin x)^p}$ は $0<p<1$ のとき収束し，$p\ge 1$ のとき (∞ に) 発散する．

(2) $(x-a)^2+y^2\le b^2 \iff a-\sqrt{b^2-y^2}\le x\le a+\sqrt{b^2-y^2}$ より，

$$\pi^{-1}V = \int_{-b}^{b}\{(a+\sqrt{b^2-y^2}\,)^2-(a-\sqrt{b^2-y^2}\,)^2\}\,dy$$

$$= \int_{-b}^{b} 2a\cdot 2\sqrt{b^2-y^2}\,dy = 8a\int_0^b \sqrt{b^2-y^2}\,dy = 2\pi ab^2.$$

よって，$V=2\pi^2ab^2$ となる．

(3) L を求めるためには，第 1 象限の部分の長さを 4 倍すればよい．第 1 象限の部分は $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$ $(0\le t\le \pi/2)$ とパラメータ表示でき，$\dfrac{dx}{dt}=-3\cos^2 t\sin t$, $\dfrac{dy}{dt}=3\sin^2 t\cos t$ となる．よって，

$$L = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-3\cos^2 t\sin t)^2+(3\sin^2 t\cos t)^2}\,dt = 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\sin t\,dt = 12\left[\frac{1}{2}\sin^2 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 6.$$