数学演習第一

高校数学の復習，大学数学への準備［1］

2020 年 5 月 13 日

1 **小テスト問題**

(1) 集合 $\{n \mid n$ は素数かつ $20 < n < 50\}$ の要素の個数は？

(2) $8^{-\frac{2}{3}} \times 4^{\frac{3}{4}} \times \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を整理すると？

(3) 複素数 $4-3i$ の逆数 $(4-3i)^{-1}$ の虚部は？

(4) 座標平面上の 3 点 $\mathrm{A}(1,-1)$, $\mathrm{B}(-2,0)$, $\mathrm{C}(-1,2)$ に対し，4 点 $\mathrm{A,B,C,D}$ が
この順に平行四辺形を作るとする．このとき，点 D の座標は？

2 **レポート問題 1** 次の文字を手書きせよ．(3 ページ目の **参考** に示された標準的な書き方に倣え)

(1) 数の集合の記号: $\mathbb{N}$ (自然数全体), $\mathbb{Z}$ (整数全体), $\mathbb{Q}$ (有理数全体), $\mathbb{R}$ (実数全体), $\mathbb{C}$ (複素数全体).

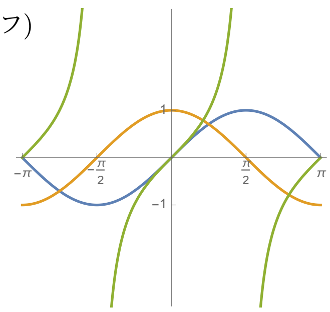
(2) ギリシャ文字の小文字: $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \theta, \iota, \kappa, \lambda, \mu, \nu, \xi, o, \pi, \rho, \sigma, \tau, \upsilon, \varphi, \chi, \psi, \omega$.
(ここに示した形のみでよい)

3 **レポート問題 2** 以下の問題 (3) から (6) に答えよ．((1), (2) は各自で)

【三角関数の問題】

(1) 次の三角関数の値の表を完成せよ．(右図は $-\pi \leqq x \leqq \pi$ でのグラフ)

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$					
$\cos x$					
$\tan x$					



(2) 三角関数の基本公式

$$\sin(-x) = -\sin x, \qquad \cos(-x) = \cos x \qquad \text{(偶奇性)}$$
$$\sin(x+n\pi) = (-1)^n \sin x, \qquad \cos(x+n\pi) = (-1)^n \cos x \quad (n \in \mathbb{Z}) \qquad \text{(反周期性, 周期性)}$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \qquad \text{(余角の公式)}$$

を用いて，$m = 2k,\ 2k+1$ $(k \in \mathbb{Z})$ のそれぞれの場合について，$\sin\left(\dfrac{m\pi}{2} \pm x\right)$, $\cos\left(\dfrac{m\pi}{2} \pm x\right)$
を $\sin x$, $\cos x$ (および k) を用いて表せ．

(3) $\sin(x \pm y)$, $\cos(x \pm y)$ を $\sin x$, $\sin y$, $\cos x$, $\cos y$ を用いて表せ (**加法定理**).

(4) (3) で得られる式の和や差をとることで，$(\sin x \text{ or } \cos x) \times (\sin y \text{ or } \cos y)$ (4 種類の積) を，
$\sin(x \pm y)$ または $\cos(x \pm y)$ を用いて表せ (**積和の公式**).

(5) (4) で得られる式で，$X = x+y$, $Y = x-y$ とおくことにより，$\sin X \pm \sin Y$, $\cos X \pm \cos Y$
を三角関数の積の形で表せ (**和積の公式**).

(6) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ および和積の公式 (または加法定理) を用いて，$\sin x$, $\cos x$ の導関数を
定義に従って計算せよ．但し，加法定理を用いる場合は初めに $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$ の値を求めてお
く必要がある．

4 【指数・対数の問題】

(1) $\log_{10} 2, \log_{10} 3$ はどのようにして定まる数か？ (指数を用いて説明せよ)

(2) 2^{10} を計算することにより $\log_{10} 2 \fallingdotseq 0.3$ であることを説明せよ.

(3) $\log_{10} 2 \fallingdotseq 0.301$ であることが知られている．これを利用して, 現在確認されている最大の素数 $2^{82589933}-1$ の桁数を最初の 3 桁までの概数で答えよ.

(4) 自然対数の底 $e = 2.71828\cdots \fallingdotseq \dfrac{27}{10}$ に対し, $\log_{10} 2 \fallingdotseq 0.301$, $\log_{10} 3 \fallingdotseq 0.477$ を利用して, $\log_{10} e$ の小数第 2 位までの近似値を求めよ．更に, $\log 2, \log 3$ (自然対数) の小数第 1 位までの近似値を求めよ.

(5) 自然対数の底 e は $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ または $\displaystyle\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$ で定義される．これらは同値な定義であるが, 前者の方がより基本的, 後者は高校の数学教科書でよく見る形である．後者の e の定義を用いて, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1$ および $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$ を導け.

(6) (5) の結果を用いて，$\log x$ $(x > 0)$ および e^x の導関数を定義に従って計算せよ.

5 【無限大の比較】

正数列 (正の数の数列) $\{p_n\}, \{q_n\}$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{q_n} = 0$ であることを $p_n \ll q_n$ $(n\to\infty)$ と表す．このとき, 自然数 k, ℓ, および 1 より大きい実数 a, b に対して

$$1 \ll (\log_b n)^\ell \ll n^k \ll a^n \ll n! \ll n^n \quad (n\to\infty)$$

が成り立つ．これを次の指示に従って示せ.

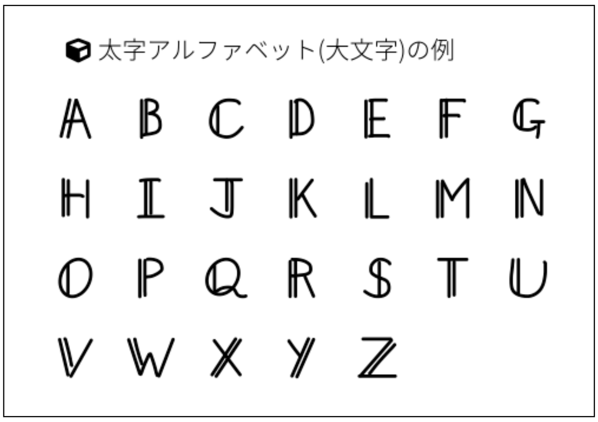
(1) 2 項定理 (2 項展開) $(x+y)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$ を思い出そう．ここで, $\dbinom{n}{k}$ は 2 項係数を表す: $\dbinom{n}{k} := {}_n\mathrm{C}_k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$. (余裕があったら, n に関する数学的帰納法で証明してみよ.)
$h = a-1 > 0$ とおくとき，2 項定理を用いて, $a^n = (1+h)^n \geqq \dbinom{n}{k+1}h^{k+1}$ $(n \geqq k+1)$ が成り立つことを示せ．更に, この不等式から $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n} = 0$ を導け．([演習] 問題 1.2.1 改)

(2) 実数 x に対し, x 以下の最大の整数を $\lfloor x\rfloor$ $(=[x])$ と表す ([演習] p.20 参照，床 (floor) 関数). $m = \lfloor \log_b n\rfloor$ とおくとき, $b^m \leqq n < b^{m+1}$ を示せ．更に, (1) の結果を用いて, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(\log_b n)^\ell}{n^k} = 0$ を示せ.

(3) $p > a$ なる自然数 p (例えば $p = \lfloor a\rfloor + 1$) を選び, $\dfrac{a^n}{n!} = \left(\dfrac{a}{1}\dfrac{a}{2}\cdots\dfrac{a}{p}\right)\cdot\left(\dfrac{a}{p+1}\dfrac{a}{p+2}\cdots\dfrac{a}{n}\right)$ と表して, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!} = 0$ を示せ.

(4) $\dfrac{n!}{n^n} = \dfrac{1}{n}\cdot\left(\dfrac{2}{n}\dfrac{3}{n}\cdots\dfrac{n}{n}\right)$ と表して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = 0$ を示せ.

参考　【手書き文字】



https://physnotes.jp/foundations/b_al/

http://kscalar.kj.yamagata-u.ac.jp/~endo/greek/orthographic.html