数学演習第一（高校復習 第１回）【解答例】

高校数学の復習, 大学数学への準備［1］

2020 年 5 月 13 日

1 (1) 問題の集合は $\{23, 29, 31, 37, 41, 43, 47\}$ であるから, 要素の個数は $\boxed{7}$.

(2) $8^{-\frac{2}{3}} \times 4^{\frac{3}{4}} \times \dfrac{1}{\sqrt{2}} = (2^3)^{-\frac{2}{3}} \cdot (2^2)^{\frac{3}{4}} \cdot 2^{-\frac{1}{2}} = 2^{-2} \cdot 2^{\frac{3}{2}} \cdot 2^{-\frac{1}{2}} = 2^{-1} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$.

(3) まず, $4-3i$ の逆数は $(4-3i)^{-1} = \dfrac{1}{4-3i} = \dfrac{4+3i}{(4-3i)(4+3i)} = \dfrac{4+3i}{16+9} = \dfrac{4}{25} + \dfrac{3}{25}i$.

よって, $(4-3i)^{-1}$ の実部は $\dfrac{4}{25}$, 虚部は $\boxed{\dfrac{3}{25}}$ である.

(4) 四角形 ABCD が平行四辺形であるから, $\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \overrightarrow{\mathrm{BA}} = (1, -1) - (-2, 0) = (3, -1)$.

ここで, C の座標が $(-1, 2)$ であるから, D の座標は $(-1, 2) + (3, -1) = \boxed{(2, 1)}$.

2 大学に入るとギリシャ文字やアルファベットの太字を使う機会が増える. 理工系分野ではギリシャ文字は頻繁に現れるので, 読めてかつ書けることは必須である. アルファベットの太字については, 大文字はレポート問題で数の集合を表すのに用いられたが, 線形代数でベクトルを小文字アルファベットの太字で表すので, 小文字の太字の使用頻度は大文字より高い. 読みやすい文字を書くために 参考 【手書き文字】 に示した標準的な書き方を参考にして欲しい.

3 (1)

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	定義されない

以下はすべて複号同順で考える.

(2) $m = 2k$ のとき,

$$\sin(k\pi \pm x) = (-1)^k \sin(\pm x) = \pm(-1)^k \sin x,$$
$$\cos(k\pi \pm x) = (-1)^k \cos(\pm x) = (-1)^k \cos x.$$

$m = 2k+1$ のとき,

$$\sin\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi \pm x\right) = (-1)^k \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = (-1)^k \cos(\mp x) = (-1)^k \cos x,$$
$$\cos\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi \pm x\right) = (-1)^k \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = (-1)^k \sin(\mp x) = \mp(-1)^k \sin x.$$

(3) $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$, $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$.

(4) (3) で答えた最初の表現式において, $\pm$ の 2 式の和および差をとることにより,

$$\sin x \cos y = \tfrac{1}{2}\{\sin(x+y) + \sin(x-y)\}, \quad \cos x \sin y = \tfrac{1}{2}\{\sin(x+y) - \sin(x-y)\}.$$

また, (3) で答えた後の表現式において, $\pm$ の 2 式の和および差をとることにより,

$$\cos x \cos y = \tfrac{1}{2}\{\cos(x+y) + \cos(x-y)\}, \quad \sin x \sin y = \tfrac{1}{2}\{-\cos(x+y) + \cos(x-y)\}.$$

(5) $X=x+y$, $Y=x-y$ とおけば, $x=\dfrac{X+Y}{2}$, $y=\dfrac{X-Y}{2}$ であるから, (4) の結果を用いて,

$$\sin X+\sin Y=2\sin\frac{X+Y}{2}\cos\frac{X-Y}{2},\quad \sin X-\sin Y=2\cos\frac{X+Y}{2}\sin\frac{X-Y}{2},$$
$$\cos X+\cos Y=2\cos\frac{X+Y}{2}\cos\frac{X-Y}{2},\quad \cos X-\cos Y=-2\sin\frac{X+Y}{2}\sin\frac{X-Y}{2}.$$

(6) 和積の公式を用いるならば, $h\to 0$ のとき,

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\frac{2\cos(x+\frac{h}{2})\sin\frac{h}{2}}{h}=\cos\bigl(x+\tfrac{h}{2}\bigr)\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\to\cos x,$$
$$\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=\frac{-2\sin(x+\frac{h}{2})\sin\frac{h}{2}}{h}=-\sin\bigl(x+\tfrac{h}{2}\bigr)\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\to-\sin x.$$

(ここで, $\cos(x+\frac{h}{2})\to\cos x$, $\sin(x+\frac{h}{2})\to\sin x$ $(h\to 0)$ を暗に用いているが, これは関数 $\cos x,\sin x$ の連続性による.) 次に, 加法定理を用いるならば, まず, 準備として, $x\to 0$ のとき,

$$\frac{1-\cos x}{x}=\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)}=\frac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)}=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\frac{x}{1+\cos x}\to 0.$$

加法定理とこの極限を用いて, $h\to 0$ のとき,

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}=\frac{\sin h}{h}\cos x-\frac{1-\cos h}{h}\sin x$$
$$\to\cos x,$$
$$\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=\frac{\cos x\cos h-\sin x\sin h-\cos x}{h}=-\frac{\sin h}{h}\sin x-\frac{1-\cos h}{h}\cos x$$
$$\to-\sin x.$$

従って, どちらの方法でも $\dfrac{d}{dx}\sin x=\cos x$, $\dfrac{d}{dx}\cos x=-\sin x$ が示された.

4 (1) $\log_{10}k$ $(k\in\mathbb{N})$ は $10^x=k$ を満たす (唯一の) $x\in\mathbb{R}$ である. ($k=2,3$ の場合が問われている.)

(2) $2^{10}=1024\fallingdotseq 10^3$ (常識とすべし) であることが容易に分かる. 常用対数 (底を 10 とする対数) をとれば, $10\log_{10}2\fallingdotseq 3$, すなわち $\log_{10}2\fallingdotseq 0.3$. もう少し丁寧に議論するなら $2^{9.5}=512\sqrt{2}<725<10^3<2^{10}$ より $9.5\log_{10}2<3<10\log_{10}2$ となり, $0.3<\log_{10}2<0.316$.

(3) $2^{82589933}-1$ が n 桁であるとすれば, $10^{n-1}\leqq 2^{82589933}-1<10^n$, 従って $10^{n-1}<2^{82589933}\leqq 10^n$ であるから, 常用対数をとって, $n-1<82589933\log_{10}2\leqq n$. ここで, $\log_{10}2\fallingdotseq 0.301$ より, $82589933\log_{10}2\fallingdotseq 2.49\times 10^7$. よって, この数は約 2490 万桁である (実際の桁数は 24,862,048 桁).

(4) $e\fallingdotseq\dfrac{27}{10}=\dfrac{3^3}{10}$ に注意して, $\log_{10}e\fallingdotseq\log_{10}\dfrac{3^3}{10}=3\log_{10}3-1\fallingdotseq 3\times 0.477-1\fallingdotseq 0.43$. 更に, これより, $\log 2=\dfrac{\log_{10}2}{\log_{10}e}\fallingdotseq\dfrac{0.301}{0.43}=0.7$, $\log 3=\dfrac{\log_{10}3}{\log_{10}e}\fallingdotseq\dfrac{0.477}{0.43}\fallingdotseq 1.1$.

(5) まず, $\displaystyle\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e$ より, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\log(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log e=1$ (言うまでもないが, 2 番目の等号では関数 $\log x$ の連続性が用いられている). 次に, $y=e^x-1$ とおけば, $x=\log(1+y)$ であり, $x\to 0$ のとき $y\to 0$ であるから, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log(1+y)}=1$.

(6) まず, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$ を用いて, $x>0$ において

$$\frac{d}{dx}\log x=\lim_{h\to 0}\frac{\log(x+h)-\log x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\log\frac{x+h}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\log(1+\frac{h}{x})}{\frac{h}{x}}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x}.$$

次に, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ を用いて, $\displaystyle\frac{d}{dx}e^x=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}\cdot e^x=e^x$.

5 証明はさておき, 問題で述べられている事実は感覚として身につけて欲しい.

(1) $a^n=(1+h)^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}h^j \geqq \binom{n}{k+1}h^{k+1}$ ($j=k+1$ の項だけ残した) より, $n\to\infty$ のとき,

$$0<\frac{n^k}{a^n}\leqq\frac{n^k}{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k)}\frac{(k+1)!}{h^{k+1}}=\frac{1}{n}\frac{1}{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{k}{n})}\frac{(k+1)!}{h^{k+1}}\to 0.$$

(2) $m=\lfloor\log_b n\rfloor$ とおけば $m\leq\log_b n<m+1$, 従って $b^m\leq n<b^{m+1}$. これより, $n\to\infty$ のとき $m\to\infty$ となることが分かる. 従って, (1) の結果を用いて,

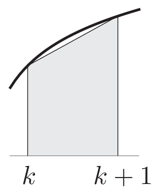
$$0<\frac{(\log_b n)^\ell}{n^k}\leq\frac{(m{+}1)^\ell}{(b^m)^k}=\frac{(m{+}1)^\ell}{(b^k)^{m+1}}\cdot b^k\to 0\quad(n\to\infty).$$

(3) $p>a$ なる自然数 p を 1 つ選ぶ. $n>p$ のとき $\frac{a}{n}<\cdots<\frac{a}{p{+}2}<\frac{a}{p{+}1}<\frac{a}{p}<1$ となるので,

$$0<\frac{a^n}{n!}=\left(\frac{a}{1}\frac{a}{2}\cdots\frac{a}{p}\right)\cdot\left(\frac{a}{p+1}\frac{a}{p+2}\cdots\frac{a}{n}\right)<\frac{a^p}{p!}\left(\frac{a}{p}\right)^{n-p}=\frac{p^p}{p!}\left(\frac{a}{p}\right)^n\to 0\ \ (n\to\infty).$$

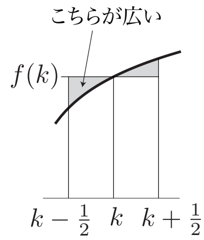
(4) $0<\frac{1}{n}<\cdots<\frac{n}{n}=1$ であるから, $0<\frac{n!}{n^n}=\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\frac{3}{n}\cdots\frac{n}{n}\right)<\frac{1}{n}\to 0\ \ (n\to\infty)$.

【補足】 $n!\ll n^n$ $(n\to\infty)$ は分かったが, 定積分を利用すればより詳しい情報が得られる. 一般に, $f(x)$ が $x>0$ で連続かつ単調増加なら, $k\leqq x\leqq k+1$ $(k>0)$ のとき $f(k)\leqq f(x)\leqq f(k+1)$ であるから, $f(k)\leqq\int_k^{k+1}f(x)\,dx\leqq f(k+1)$ となり, $f(1)+\int_1^n f(x)\,dx\leqq\sum_{k=1}^{n}f(k)\leqq\int_1^{n+1}f(x)\,dx$.
更に, $f(x)$ が上に凸ならば, $\frac{1}{2}\{f(k)+f(k+1)\}\leqq\int_k^{k+1}f(x)\,dx$ (右上図) より,



$$\sum_{k=1}^{n}f(k)\leqq\frac{1}{2}\{f(1)+\frac{1}{2}f(n)\}+\int_1^n f(x)\,dx.$$

また, $\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}f(x)\,dx\leqq f(k)$ (右下図) より, $\int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}f(x)\leqq\sum_{k=1}^{n}f(k)$. よって,



$$\boxed{\int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}f(x)\,dx\leqq\sum_{k=1}^{n}f(k)\leqq\frac{1}{2}\{f(1)+f(n)\}+\int_1^n f(x)\,dx}$$

が成り立つ. 特に $f(x)=\log x$ とすれば, 上の不等式において,

$$(\text{右側の式})=\frac{1}{2}\log n+\int_1^n\log x\,dx=\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n-n+1,$$

$$\begin{aligned}(\text{左側の式})&=\int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\log x\,dx=\left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(n+\frac{1}{2}\right)-n+\frac{1}{2}\log 2\\&\geqq\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n-n+\frac{1}{2}(\log 2+1)\end{aligned}$$

ここで, 最後の不等号は次の計算による:

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\left\{\log\left(n+\frac{1}{2}\right)-\log n\right\}=\frac{1}{2}\log\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^{2n+1}=\frac{1}{2}\log\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)^{-(2n+1)}\geqq\frac{1}{2}.$$

但し, $n\to\infty$ のとき, $(1-\frac{1}{n})^{-n}$ が n について単調減少し, e に収束する事実を用いた. 以上より,

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n-n+\frac{1}{2}(\log 2+1)\leqq\log n!\leqq\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n-n+1.$$

指数関数 e^x の単調増加性により, 上の不等式の各辺を e の肩に乗せ,

$$\boxed{\sqrt{2en}\,e^{-n}n^n\leqq n!\leqq e\sqrt{n}\,e^{-n}n^n}.\qquad \text{すなわち,}\ \ \sqrt{2en}\,e^{-n}\leqq\frac{n!}{n^n}\leqq e\sqrt{n}\,e^{-n}.$$

実は, より精密な結果として, $n\to\infty$ のとき, $\frac{n!}{n^n}\sim\frac{\sqrt{2\pi n}}{e^n}$ (あるいは $\boxed{n!\sim\sqrt{2\pi n}\,e^{-n}n^n}$) が知られている (Stirling(スターリング)の公式). ここで, $p_n\sim q_n$ $(n\to\infty)$ とは $\lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{q_n}=1$ を意味する.