数学演習第一

高校数学の復習, 大学数学への準備［2］

2020 年 5 月 20 日

- $\boxed{\textbf{小テスト}}$ の問題は $(\star)$ で示された 4 問です. ($\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{4}$, $\boxed{6}$ の最初の設問)
- $\boxed{\textbf{レポート課題}}$ は枠で囲んだ番号の 6 問です. ($\boxed{1}(2)$, $\boxed{2}(3),(9)$, $\boxed{4}(1),(8)$, $\boxed{5}(5)$)
  答だけでなく, 筋道が分かる程度には計算も残して下さい.
- それ以外の問題は自習問題です. 多めに出題されていますが, 時間を見つけて是非解いて下さい.

$\boxed{\textbf{1}}$ 次の極限を求めよ. (極限があるとは限らない.)

$(\star)$ $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$ の値は？

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\,)$　　$\boxed{(2)}$ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to +0} x\log x$

(4) $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} a^{n+2}$ (a は定数)　　(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n$　　(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-4^{-x}}{2x}$

【注】
- 正値関数 $f(x), g(x)$ に対して, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0$ であることを $f(x)\ll g(x)$ $(x\to\infty)$ と書けば,

$$a>1, b>1, p>0 \text{ が定数のとき,}\quad 1\ll \log_b x \ll x^p \ll a^x \quad (x\to\infty).$$

- 三角関数, 指数・対数関数における最も基本的な極限値は

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

$\boxed{\textbf{2}}$ 次の関数を微分せよ. (式を見やすい形に整理して答えること.)

$(\star)$ $y=(x^2-2x+4)^{\frac{3}{2}}$ の $x=0$ における微分係数は？

(1) $\displaystyle y=\frac{(2x-1)^3}{(x+1)^2}$　　(2) $y=x^3(\log x)^2$　　$\boxed{(3)}$ $y=\log(x+\sqrt{x^2+1}\,)$

(4) $\displaystyle y=\log\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$　　(5) $\displaystyle y=\frac{e^x-1}{e^x+1}$　　(6) $y=x^2\cdot 4^x$　　(7) $y=e^{-\frac{1}{x}}$

(8) $y=\sin^3(2x+1)$　　$\boxed{(9)}$ $\displaystyle y=\frac{\cos x}{1-\sin x}$　　(10) $\displaystyle y=\frac{1}{\tan x}$　　(11) $y=\log|\cos x|$

【注】
- 積の導関数: $\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
- 商の導関数: $\displaystyle\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}=f'(x)g(x)^{-1}+f(x)\{g(x)^{-1}\}'$
- 合成関数の微分法: $\{g(f(x))\}'=g'(f(x))f'(x)$
- 対数微分法: $\displaystyle\{\log|f(x)|\}'=\frac{f'(x)}{f(x)}$ (合成関数の微分法の一例, 本格的には大学で)

3 次の問いに答えよ. (ここでの内容は数IIIの教科書に出ているが, 厳密な取扱いはこれから学ぶ.)

(1) 微分可能な関数 $y = f(x)$ が逆関数 $x = f^{-1}(y)$ をもつとき, $f^{-1}(y)$ も微分可能ならば, $f(f^{-1}(y)) = y$ を y で微分し, $f'(f^{-1}(y))\{f^{-1}(y)\}' = 1$ (合成関数の微分法). よって,

$$\{f^{-1}(y)\}' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(x)} \qquad \left(\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}\right)$$

が成り立つ. この事実を用いて, $y = \tan x \ \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$ の逆関数を $x = g(y)$ と表すとき, 導関数 $g'(y)$ を求めよ (微分可能性は仮定してよい).

(2) $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ がともに微分可能で, $x = \varphi(t)$ が逆関数 $t = \varphi^{-1}(x)$ をもつとする. このとき, $\varphi^{-1}(x)$ が微分可能ならば, $y = \psi(\varphi^{-1}(x))$ を x で微分して (合成関数の微分法),

$$\frac{dy}{dx} = \psi'(\varphi^{-1}(x))\{\varphi^{-1}(x)\}' = \frac{\psi'(\varphi^{-1}(x))}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \qquad \left(\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)$$

が得られる. この事実を用いて, $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ $(0 < t < 2\pi)$ により y を x の関数とみるとき, $\dfrac{dy}{dx}$ を t の関数として表せ (微分可能性は仮定してよい).

4 次の不定積分を計算せよ. (積分定数は省略してもよい.)

($\star$) $\displaystyle\int \frac{2x^2-2x+1}{x+1}\,dx = ax^2 + bx + c\log|x+1| + C$ と表したとき, $a+b+c$ の値は?

$\boxed{(1)}$ $\displaystyle\int \frac{dx}{(2x+1)^3}$ (2) $\displaystyle\int \frac{x-1}{\sqrt{x+1}}\,dx$ (3) $\displaystyle\int xe^{-x^2}\,dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{a^x}{a^x+1}\,dx$ (a は正定数) (5) $\displaystyle\int x\log(x+1)\,dx$ (6) $\displaystyle\int \sin^3 x\,dx$

(7) $\displaystyle\int \sin 2x\cos 3x\,dx$ $\boxed{(8)}$ $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}$ $\left(ヒント: \frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x}{\cos^2 x} = \frac{(\sin x)'}{1-\sin^2 x}\right)$

【注】
- 置換積分法: $\displaystyle\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)\,dt\ (x = g(t))$, $\displaystyle\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du\ (u = g(x))$
- 部分積分法: $\displaystyle\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$

5 次の定積分を計算せよ. ((2) の a, b は $a < b$ を満たす定数, (4) は極限値を求めよ)

(1) $\displaystyle\int_0^1 (1-x)^5\,dx$ (2) $\displaystyle\int_a^b (x-a)^2(x-b)^2\,dx$ (3) $\displaystyle\int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\,dx$

(4) $\displaystyle\lim_{a\to+0}\int_a^1 \log x\,dx$ $\boxed{(5)}$ $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$ (6) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \tan x\,dx$ (7) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos^3 x\,dx$

6 次の極限値を求めよ.

($\star$) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1^4+2^4+\cdots+n^4}{n^5}$ の値は? (ヒント:区分求積法)

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+n}}\right)$ (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$

【注】
- 区分求積法: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx$ (最も単純な場合)
- $f(x)$ が $x \geqq 1$ で単調減少なら, $\displaystyle\int_1^{n+1} f(x)\,dx \leqq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqq f(1) + \int_1^n f(x)\,dx$