数学演習第一（高校復習 第２回）【解答例】

高校数学の復習, 大学数学への準備［２］

2020 年 5 月 20 日

1 (⋆) $y = \dfrac{1}{x}$ とおけば, $x \to \infty$ のとき $y \to +0$. よって, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x \sin\frac{1}{x} = \lim_{y\to+0} \frac{\sin y}{y} = \boxed{1}$.

(1) $\sqrt{n}\,(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\,) = \sqrt{n} \cdot \dfrac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} \xrightarrow{n\to\infty} \boxed{\dfrac{1}{2}}$.

(2) 半角の公式を用いて, $\dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \dfrac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \dfrac{2}{4}\left(\dfrac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 \xrightarrow{x\to 0} \boxed{\dfrac{1}{2}}$. あるいは分子分母に $1 + \cos x$ を掛けて, $\dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \dfrac{1 - \cos^2 x}{(1 + \cos x)x^2} = \dfrac{1}{1 + \cos x}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2 \xrightarrow{x\to 0} \boxed{\dfrac{1}{2}}$.

(3) $y = \dfrac{1}{x}$ とおけば, $x \to +0$ のとき $y \to \infty$. このとき, $x \log x = \dfrac{1}{y} \log \dfrac{1}{y} = -\dfrac{\log y}{y} \xrightarrow[x\to+0]{y\to\infty} \boxed{0}$. ここで, $\log y \ll y\ \ (y \to \infty)$ であることを用いた.

(4) まず, $a^{n+2}\ \ (n = 1, 2, \ldots)$ は初項 a^3, 公比 a の等比数列であるから, $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} a^{n+2} = \begin{cases} \dfrac{a^3(1 - a^N)}{1 - a} & (a \neq 1), \\ N & (a = 1). \end{cases}$

これより, $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a^{n+2} = \boxed{\begin{cases} \dfrac{a^3}{1 - a} & (|a| < 1), \\ \infty & (a \geqq 1), \\ \text{存在せず} & (a < -1). \end{cases}}$

(5) $h = -\dfrac{1}{2n}$ とおけば, $n = -\dfrac{1}{2h}$ であり, $n \to \infty$ のとき $h \to -0$. よって,

$$\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n = (1 + h)^{-\frac{1}{2h}} = \{(1 + h)^{\frac{1}{h}}\}^{-\frac{1}{2}} \xrightarrow[n\to\infty]{h\to -0} e^{-\frac{1}{2}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{e}}}.$$

(6) $4^{-x} = e^{(-x)\log 4} = e^{(-2\log 2)x}$ より, $\dfrac{1 - 4^{-x}}{2x} = -\dfrac{e^{(-2\log 2)x} - 1}{2x} = \dfrac{e^{(-2\log 2)x} - 1}{(-2\log 2)x} \cdot \log 2 \xrightarrow{x\to 0} \boxed{\log 2}$.

2 (⋆) 合成関数の微分法を用いて, $f(x) := (x^2 - 2x + 4)^{\frac{3}{2}}$ を微分すると,

$$f'(x) = \frac{3}{2}(x^2 - 2x + 4)^{\frac{1}{2}} \cdot (2x - 2) = 3(x - 1)\sqrt{x^2 - 2x + 4}. \qquad \therefore f'(0) = 3 \cdot (-1)\sqrt{4} = \boxed{-6}.$$

(1) $y = (2x - 1)^3(x + 1)^{-2}$ と書いて,

$$\begin{aligned} y' &= 6(2x - 1)^2 \cdot (x + 1)^{-2} + (2x - 1)^3 \cdot (-2)(x + 1)^{-3} \\ &= (2x - 1)^2(x + 1)^{-3}\{6(x + 1) - 2(2x - 1)\} = \boxed{\frac{2(x + 4)(2x - 1)^2}{(x + 1)^3}}. \end{aligned}$$

商の導関数の公式を使ってもよいが, この問題では最後に「約分」操作が必要となる. 別の有効な方法として「対数微分法」にも言及しておく. $y = \dfrac{(2x - 1)^3}{(x + 1)^2}$ の両辺の絶対値をとり, 更に自然対数をとれば, $\log|y| = 3\log|2x - 1| - 2\log|x + 1|$. これを x で微分して, $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{6}{2x - 1} - \dfrac{2}{x + 1}$. これより,

$$y' = y \cdot 2\left(\frac{3}{2x - 1} - \frac{1}{x + 1}\right) = \frac{(2x - 1)^3}{(x + 1)^2} \cdot \frac{2(x + 4)}{(2x - 1)(x + 1)} = \boxed{\frac{2(x + 4)(2x - 1)^2}{(x + 1)^3}}.$$

(2) $y' = 3x^2(\log x)^2 + x^3 \cdot \dfrac{2\log x}{x} = 3x^2(\log x)^2 + 2x^2 \log x = \boxed{x^2(3\log x + 2)\log x}$.

(3) 合成関数の微分法により, $y' = \dfrac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}\left(1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right) = \dfrac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \boxed{\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}}$.

(4) まず, 対数の真数は正なので, この関数の定義域は $-1 < x < 1$. このとき, $y = \dfrac{1}{2}\{\log(1 - x) - \log(1 + x)\}$ より, $y' = \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{1 - x} - \dfrac{1}{1 + x}\right) = -\dfrac{1}{2} \dfrac{(1 + x) + (1 - x)}{(1 - x)(1 + x)} = \boxed{\dfrac{1}{x^2 - 1}}$.

(5) $y = 1 - \dfrac{2}{e^x + 1}$ より, $y' = \dfrac{2}{(e^x+1)^2} \cdot e^x = \boxed{\dfrac{2e^x}{(x^2+1)^2}}$.

(6) $y' = 2x \cdot 4^x + x^2 \cdot 4^x \log 4 = \boxed{2x(x\log 2 + 1)\,4^x}$.　　(7) $y' = e^{-\frac{1}{x}} \cdot \dfrac{1}{x^2} = \boxed{\dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}}$.

(8) $y' = 3\sin^2(2x+1) \cdot \cos(2x+1) \cdot 2 = \boxed{6\sin^2(2x+1)\cos(2x+1)}$.

(9) $y' = \dfrac{(-\sin x)(1-\sin x) - (\cos x)(-\cos x)}{(1-\sin x)^2} = \dfrac{-\sin x + 1}{(1-\sin x)^2} = \boxed{\dfrac{1}{1-\sin x}}$.

(10) $y' = -\dfrac{1}{\tan^2 x} \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x} = \boxed{-\dfrac{1}{\sin^2 x}}$.　　(11) $y' = \dfrac{-\sin x}{\cos x} = \boxed{-\tan x}$.

3 (1) $y = \tan x \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$ の逆関数が $x = g(y)$ であるから,

$$g'(y) = \frac{1}{(\tan x)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \boxed{\frac{1}{1+y^2}}.$$

(2) $x = \varphi(t) := t - \sin t$, $y = \varphi(t) := 1 - \cos t$ とおけば,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \boxed{\frac{\sin t}{1-\cos t}} = \frac{2\cos\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} = \frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} = \boxed{\frac{1}{\tan\frac{t}{2}}}.$$

4 ($\star$) $\dfrac{2x^2 - 2x + 1}{x+1} = 2x - 4 + \dfrac{5}{x+1}$ より,

$$(\text{与式}) = \int\left(2x - 4 + \frac{5}{x+1}\right)dx = x^2 - 4x + 5\log|x+1| + C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

よって, $a = 1$, $b = -4$, $c = 5$ となり, $a + b + c = \boxed{2}$.

以下では, 積分定数は省略する.

(1) $(\text{与式}) = \displaystyle\int (2x+1)^{-3}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{-2}(2x+1)^{-2}\} = \boxed{-\frac{1}{4(2x+1)^2}}$.

(2) $(\text{与式}) = \displaystyle\int \frac{(x+1)-2}{\sqrt{x+1}}\,dx = \int\left\{(x+1)^{\frac{1}{2}} - 2(x+1)^{-\frac{1}{2}}\right\}dx = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - 2\cdot 2(x+1)^{\frac{1}{2}}$

$= \boxed{\dfrac{2}{3}(x-5)\sqrt{x+1}}$.

あるいは, $u = \sqrt{x+1}$ とおけば, $x = u^2 - 1$, $dx = 2u\,du$ となるので,

$$(\text{与式}) = \int \frac{(u^2-1)-1}{u} \cdot 2u\,du = 2\int(u^2-2)\,du = \frac{2}{3}\,(u^2-6)u = \boxed{\frac{2}{3}(x-5)\sqrt{x+1}}.$$

(3) $(\text{与式}) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int e^{-x^2}(x^2)'\,dx = \boxed{-\frac{1}{2}e^{-x^2}}$.

(4) $(\text{与式}) = \displaystyle\int \frac{\frac{1}{\log a}(a^x+1)'}{a^x+1}\,dx = \boxed{\frac{\log(a^x+1)}{\log a}} = \boxed{\log_a(a^x+1)}$.

(5) まず, 被積分関数の定義域は $x > -1$ であることに注意する. 部分積分法を用いて,

$$(\text{与式}) = \frac{1}{2}x^2\log(x+1) - \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x+1}\,dx = \frac{1}{2}x^2\log(x+1) - \frac{1}{2}\int\left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2\log(x+1) - \frac{1}{2}\left\{\frac{x^2}{2} - x + \log(x+1)\right\} = \boxed{\frac{1}{4}x(x-2) + \frac{1}{2}(x^2-1)\log(x+1)}.$$

(6) $(\text{与式}) = \displaystyle\int(1-\cos^2 x)\sin x\,dx = -\int(1-\cos^2 x)(\cos x)'\,dx = -\left(\cos x - \frac{1}{3}\cos^3 x\right) = \boxed{\frac{1}{3}(\cos^3 x - 3\cos x)}$.

あるいは, 3 倍角の公式 $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ を用いて, $\sin^3 x = \dfrac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$ であるから,

$$(\text{与式}) = \frac{1}{4}\int(3\sin x - \sin 3x)\,dx = \frac{1}{4}\left(-3\cos x + \frac{1}{3}\cos 3x\right) = \boxed{\frac{1}{12}(\cos 3x - 9\cos x)}.$$

(7) 積和の公式を用いて, (与式) $= \dfrac{1}{2}\displaystyle\int(\sin 5x - \sin x)\,dx = \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{5}\cos 5x + \cos x\right) = \boxed{\dfrac{1}{10}(5\cos x - \cos 5x)}$.

(8) ヒントに従って計算し, $u = \sin x$ とおけば,

$$(\text{与式}) = \int \frac{(\sin x)'\,dx}{1-\sin^2 x} = \int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}\right) = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+u}{1-u}\right| = \boxed{\frac{1}{2}\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}.$$

5

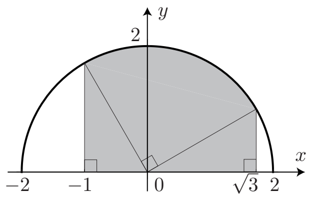
(1) (与式) $= \left[-\dfrac{1}{6}(1-x)^5\right]_0^1 = \boxed{\dfrac{1}{6}}$. $u = 1-x$ で置換してもよい.

(2) 部分積分を用いる.

$$(\text{与式}) = \left[\frac{1}{3}(x-a)^3(x-b)^2\right]_a^b - \frac{2}{3}\int_a^b (x-a)^3(x-b)\,dx$$
$$= -\frac{2}{3}\left\{\left[\frac{1}{4}(x-a)^4(x-b)\right]_a^b - \frac{1}{4}\int(x-a)^4\,dx\right\} = \frac{1}{6}\left[\frac{1}{5}(x-a)^5\right]_a^b = \boxed{\frac{1}{30}(b-a)^5}.$$

(3) $x = 2\cos\theta$ とおけば, $dx = -2\sin\theta\,d\theta$ であり, $x = -1 \to \sqrt{3}$ は $\theta = \dfrac{2\pi}{3} \to \dfrac{\pi}{6}$ に対応する. よって,

$$(\text{与式}) = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{4(1-\cos^2\theta)}\,(-2\sin\theta)\,d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}} 4\sin^2\theta\,d\theta$$
$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}} 2(1-\cos 2\theta)\,d\theta = \Big[2\theta - \sin 2\theta\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}} = \boxed{\pi + \sqrt{3}}.$$



あるいは, 右図の面積に注目し, (与式) $= \dfrac{4\pi}{4} + 2\cdot\dfrac{1\cdot\sqrt{3}}{2} = \boxed{\pi + \sqrt{3}}$.

(4) $\displaystyle\int_a^1 \log x\,dx = \Big[x\log x\Big]_a^1 - \int_a^1 x\cdot\frac{1}{x}\,dx = -a\log a - (1-a) = a - a\log a - 1$. ここで, $\boxed{1}$(3) より $\displaystyle\lim_{a\to+0} a\log a = 0$ であったから, $\displaystyle\lim_{a\to+0}\int_a^1 \log x\,dx = \boxed{-1}$.

(5) 部分積分を用いる. (与式) $= \Big[-x\cos x\Big]_0^\pi + \displaystyle\int_0^\pi \cos x\,dx = \pi + \Big[\sin x\Big]_0^\pi = \boxed{\pi}$.

(6) (与式) $= \displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{-(\cos x)'}{\cos x}\,dx = \Big[-\log(\cos x)\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = -\log\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \log\sqrt{3} = \boxed{\frac{1}{2}\log 3}$.

(7) $\sin^2 x\cos^3 x = \sin^2(1-\sin^2 x)(\sin x)'$ に注意して, $u = \sin x$ とおけば, $du = \cos x\,dx$ で, $x = 0 \to \dfrac{\pi}{2}$ は $u = 0 \to 1$ に対応する. よって, (与式) $= \displaystyle\int_0^1 u^2(1-u^2)\,du = \left[\frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{5}u^5\right]_0^1 = \boxed{\frac{2}{15}}$.

6

(⋆) 区分求積法により, $\dfrac{1^4 + 2^4 + \cdots + n^4}{n^5} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4 \xrightarrow{n\to\infty} \int_0^1 x^4\,dx = \boxed{\frac{1}{5}}$.

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n+n}}\right) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}} \xrightarrow{n\to\infty} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x}} = \Big[2\sqrt{1+x}\Big]_0^1 = \boxed{2\sqrt{2}-2}$.

(2) 一般に, $f(x)$ が $x \geqslant 1$ において単調減少ならば, $k \leqslant x \leqslant k+1$ (k は自然数) のとき $f(k+1) \leqslant f(x) \leqslant f(k)$ であるから, $f(k+1) \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} f(x)\,dx \leqslant f(k)$. 左側の不等式を用いて, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} f(k) \leqslant \int_1^n f(x)\,dx$. また, 右側の不等式を用いて, $\displaystyle\int_1^{n+1} f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k)$. よって, $\displaystyle\int_1^{n+1} f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant f(1) + \int_1^n f(x)\,dx$. 特に, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ と選び, $\log(n+1) \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \leqslant 1 + \log n$. よって, $\dfrac{\log(n+1)}{\log n} \leqslant \dfrac{1}{\log n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{\log n} + 1$.
ここで, $\dfrac{\log(n+1)}{\log n} = \dfrac{\log n + \log(1+\frac{1}{n})}{\log n} \to 1 \ (n \to \infty)$ であるから, “はさみうちの原理” により, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = \boxed{1}$.