数学演習第一・中間統一試験【解説】

2020 年 9 月 18 日実施 ・ 試験時間 90 分

$\boxed{1}$ 逆三角関数について次の問いに答えよ.

(1) $\mathrm{Sin}^{-1}\left(\sin\dfrac{34\pi}{11}\right)$ の値を求めよ.

【答】 $\sin\dfrac{34\pi}{11}=\sin\left(2\pi+\dfrac{12\pi}{11}\right)=\sin\left(\pi-\dfrac{12\pi}{11}\right)=\sin\left(-\dfrac{\pi}{11}\right)$ より, $\mathrm{Sin}^{-1}\left(\sin\dfrac{34\pi}{11}\right)=\boxed{-\dfrac{\pi}{11}}$.

(2) $\mathrm{Cos}^{-1}\left(\sqrt{6}\sin\dfrac{\pi}{8}\cos\dfrac{\pi}{8}\right)$ の値を求めよ.

【答】 $\sqrt{6}\sin\dfrac{\pi}{8}\cos\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ なので,

$$\mathrm{Cos}^{-1}\left(\sqrt{6}\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}\right)=\mathrm{Cos}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\boxed{\frac{\pi}{6}}.$$

(3) $\mathrm{Tan}^{-1}x+\mathrm{Tan}^{-1}(1-x^2)=\dfrac{\pi}{4}$ を満たす実数 x をすべて求めよ.

【答】 両辺の tan をとると, 加法定理により $\dfrac{x+(1-x^2)}{1-x(1-x^2)}=1$. これを解くと,

$$\frac{x+(1-x^2)}{1-x(1-x^2)}=1 \quad\Leftrightarrow\quad x(x-1)(x+2)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=0,\ 1,\ -2.$$

両辺の tan をとる操作は同値変形ではないので, $x=0,1,-2$ が実際に解かどうかを吟味する必要がある. $x=0,1$ は明らかに解である. しかし, $x=-2$ のとき, (左辺) $=\mathrm{Tan}^{-1}(-2)+\mathrm{Tan}^{-1}(-3)<0$ であるから, $x=-2$ は解ではない. よって, 解は $x=\boxed{0,\ 1}$ である.

《注》$x=-2$ は $\mathrm{Tan}^{-1}x+\mathrm{Tan}^{-1}(1-x^2)=-\dfrac{3\pi}{4}$ の解である.

$\boxed{2}$ 次の極限値を求めよ.

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x(1-\cos x)}$

【答】 ロピタルの定理を 3 回繰り返し用いて,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x(1-\cos x)}&=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}\cos x}{1-\cos x+x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}(\cos^2 x-\sin x)}{2\sin x+x\cos x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}(\cos^3 x-3\cos x\sin x-\cos x)}{3\cos x-x\sin x}=\boxed{\frac{1}{3}}.\end{aligned}$$

［別法］ $\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x(1-\cos x)}=\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}\dfrac{x^2}{1-\cos x}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$ と分解して,

- $f(x)=\sin x$ に平均値の定理を適用し, $\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}=\dfrac{f(x)-f(\sin x)}{x-\sin x}=\underset{c(x)\text{ は }x\text{ と }\sin x\text{ の間の数}}{f'(^{\exists}c(x))}=e^{c(x)}\xrightarrow{x\to 0}1.$

  あるいは, $\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}=e^{\sin x}\cdot\dfrac{e^y-1}{y}\xrightarrow[y:=x-\sin x\to 0]{x\to 0}1\cdot 1=1.$ ロピタルの定理を用いてもよい.
- $\dfrac{x^2}{1-\cos x}=\dfrac{x^2(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}=\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)^2(1+\cos x)\xrightarrow{x\to 0}2.$ ロピタルの定理を用いてもよい.
- ロピタルの定理を用いて, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\frac{1}{6}$. (最後の等号はすぐ上の極限値による.)

よって, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x(1-\cos x)}=\left(\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}\right)=1\cdot 2\cdot\frac{1}{6}=\boxed{\frac{1}{3}}.$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\Big(\frac{2^x+3^x}{2}\Big)^{\frac{1}{x}}$

【答】 まず, 対数をとった極限を考える. ロピタルの定理により,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\log\Big(\frac{2^x+3^x}{2}\Big)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to 0}\frac{\log(2^x+3^x)-\log 2}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2^x+3^x}\cdot(2^x\log 2+3^x\log 3)}{1}\\ &= \frac{1}{2}(\log 2+\log 3) = \log\sqrt{6}.\end{aligned}$$

よって, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\Big(\frac{2^x+3^x}{2}\Big)^{\frac{1}{x}} = e^{\log\sqrt{6}} = \boxed{\sqrt{6}}$.

(6) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{x(\frac{\pi}{2}+\mathrm{Tan}^{-1}2x)}$

【答】 分子, 分母を x で割ってからロピタルの定理を適用し,

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{x(\frac{\pi}{2}+\mathrm{Tan}^{-1}2x)} = \lim_{x\to -\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{\pi}{2}+\mathrm{Tan}^{-1}2x} = \lim_{x\to -\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{2}{1+(2x)^2}} = \lim_{x\to -\infty}\Big(-\frac{1+4x^2}{2x^2}\Big) = \boxed{-2}.$$

$\boxed{3}$ 次の関数 (括弧内が定義域) の導関数を整理された形で求めよ.

(7) $x^{x\log x}$ $(x>0)$

【答】 $y=x^{x\log x}$ とおけば, $\log y=(x\log x)\log x = x(\log x)^2$. この両辺を x で微分して,

$$\frac{y'}{y} = (\log x)^2 + x\cdot\frac{2\log x}{x} = (\log x+2)\log x.$$

よって, $y' = x^{x\log x}y = \boxed{x^{x\log x}(\log x+2)\log x}$.

(8) $\sin(\mathrm{Cos}^{-1}x)$ $(-1<x<1)$

【答】 $\displaystyle\{\sin(\mathrm{Cos}^{-1}x)\}' = \cos(\mathrm{Cos}^{-1}x)\cdot(\mathrm{Cos}^{-1}x)' = x\cdot\Big(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\Big) = \boxed{-\frac{x}{\sqrt{1-x}}}$.

(9) $\mathrm{Sin}^{-1}\sqrt{1-x^2}$ $(-1<x<0)$

【答】 定義域が $-1<x<0$ であることに注意して,

$$\big(\mathrm{Sin}^{-1}\sqrt{1-x^2}\big)' = \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}}\cdot\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{|x|}\cdot\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}.$$

$\boxed{4}$ (10) 関数 $f(x)=\dfrac{|x+1|}{x^2+8}$ の極値を求めよ. ただし, 各極値 b に対し「$x=a$ で 極大値 (or 極小値) b をとる」という形で答えること.

【答】 $f(x)=\pm\dfrac{x+1}{x^2+8}$ $(x\gtrless -1)$ より, $f'(x)=\mp\dfrac{(x+4)(x-2)}{(x^2+8)^2}$ $(x\gtrless -1)$. よって, $f(x)$ の増減は

x	$-\infty$	$\cdots$	-4	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$1/8$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$1/4$	$\searrow$	0

となる. 従って,

$$\boxed{x=-4 \text{ で極大値 } \frac{1}{8},\ \ x=-1 \text{ で極小値 } 0,\ \ x=2 \text{ で極大値 } \frac{1}{4} \text{ をとる}}.$$

$\boxed{5}$ 空間の3点 A$(1,2,4)$，B$(2,-1,3)$，C$(1,-2,2)$ を通る平面を P とするとき，以下の問いに答えよ．

(11) 三角形 ABC の面積を求めよ．

【答】 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{bmatrix}1\\-3\\-1\end{bmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{bmatrix}0\\-4\\-2\end{bmatrix}$ より, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{bmatrix}1\\-3\\-1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0\\-4\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\2\\-4\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}$. よって,

$$(\text{三角形 ABC の面積})=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}\|=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{1+1+4}=\boxed{\sqrt{6}}.$$

(12) 平面 P の方程式を整理された形で求めよ．

【答】平面 P は点 A を通り, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を法線ベクトルとするから, 方程式は $(x-1)+(y-2)-2(z-4)=0$ で与えられる．これを整理して $\boxed{x+y-2z+5=0}$.

(13) 原点 O から平面 P に垂線 OH を下ろすとき，垂線 OH の長さを求めよ．

【答】 垂線 OH の長さは点 O と平面 P との距離であるから, 公式を用いて $\dfrac{|0+0-2\cdot 0+5|}{\sqrt{1+1+4}}=\boxed{\dfrac{5}{\sqrt{6}}}$.

［別法］$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は平行であるから, H$(t,t,-2t)$ とおくことができ, これが平面 P 上にあるから, $t+t-2\cdot(-2t)+5=0$, すなわち $t=-5/6$. よって, H$(-5/6,\ -5/6,\ 5/3)$ となり,

$$(\text{OH の長さ})=\frac{5}{6}\sqrt{1+1+4}=\boxed{\frac{5\sqrt{6}}{6}}.$$

$\boxed{6}$ $A=\begin{bmatrix}0&6\\-1&5\end{bmatrix}$，$P=\begin{bmatrix}3&4\\1&2\end{bmatrix}$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(14) $P^{-1}AP$ を求めよ．

【答】 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}3&4\\1&2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0&6\\-1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&4\\1&2\end{bmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}2&-4\\-1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6&12\\2&6\end{bmatrix}=\boxed{\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}}$.

(15) $A\boldsymbol{x}=2\boldsymbol{x}$ を満たす2次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ をすべて求めよ．

【答】 $A\boldsymbol{x}=2\boldsymbol{x}$ は同次連立1次方程式 $(A-2E)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ に他ならない．係数行列 $A-2E$ を簡約化すると,

$$A-2E=\begin{bmatrix}-2&6\\-1&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-3\\-1&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-3\\0&0\end{bmatrix}.$$

よって, $A\boldsymbol{x}=2\boldsymbol{x}$ を満たす $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}=\boxed{c\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}}$ (c は任意定数) の形で与えられる．

［別法］ 固有値・固有ベクトルに関する知識があれば次のようにも考えられる．$A\boldsymbol{x}=2\boldsymbol{x}$ を満たす $\boldsymbol{x}$ は A の固有値2に対する固有ベクトルまたは零ベクトルである．一方, (14) の結果より, そのような $\boldsymbol{x}$ は P の第1列のスカラー倍で与えられる．よって, $\boldsymbol{x}=\boxed{c\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}}$ (c は任意定数).

$\boxed{7}$ (16) 行列 $\begin{bmatrix}1&1&a\\-1&a&-a\\a+1&a-1&2\end{bmatrix}$ の階数を求めよ (a の値によって場合分け).

【答】 行基本変形により,

$$\begin{bmatrix}1&1&a\\-1&a&-a\\a+1&a-1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&a\\0&a+1&0\\0&-2&2-a-a^2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&a\\0&1&\frac{1}{2}(a+2)(a-1)\\0&a+1&0\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&1&a\\0&1&\frac{1}{2}(a+2)(a-1)\\0&0&-\frac{1}{2}(a+1)(a+2)(a-1)\end{bmatrix}.$$

よって, 階数は $\boxed{a=-1,-2,1 \text{ のとき } 2}$, $\boxed{a\neq -1,-2,1 \text{ のとき } 3}$ である．

8 同次連立 1 次方程式 $\begin{cases} 2x+5y+kz=0 \\ 3x+2y+5z=0 \\ x+2y-\ \ z=0 \end{cases}$ について次の問いに答えよ.

(17) 無数の解をもつための k の条件を求めよ.

【答】 係数行列を簡約化すると,

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & k \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & k \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & k+2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & k+2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & k+4 \end{bmatrix}$$

よって, 無数の解をもつための k の条件は $\boxed{k=-4}$ である.

(18) k が (17) の条件を満たすとき，基本解を求めよ.

【答】 $k=-4$ のとき, 係数行列の簡約行列は $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ であるから, 解は $z=t$ とおいて,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3t \\ 2t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

よって, 基本解は $\boxed{\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}$ である.

9 連立 1 次方程式 $\begin{cases} x_1+\ \ 5x_2+\ \ 3x_3+\ \ 3x_4=\ \ 3 \\ 3x_1+15x_2+\ \ 7x_3+\ \ 9x_4=\ \ 1 \\ 2x_1+10x_2+\ \ 5x_3+\ \ 6x_4=\ \ 2 \\ 5x_1+25x_2+11x_3+16x_4=-1 \end{cases}$ について次の問いに答えよ.

(19) 拡大係数行列の簡約行列を求めよ.

【答】 拡大係数行列に行基本変形を施して,

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 15 & 7 & 9 & 1 \\ 2 & 10 & 5 & 6 & 2 \\ 5 & 25 & 11 & 16 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -16 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -16 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}.$$

(20) 解を求めよ．ただし, 無数の解をもつならば，任意定数 (パラメータ) の取り方は標準的な方法，すなわち線形代数の教科書に書かれている方法 (= 演習の解答例の方法) に従え．また，任意定数の文字は $s, t, \ldots$ を用いよ.

【答】 拡大係数行列の簡約行列の主成分に関係しない変数を任意定数とすればよい. $x_2=s$ とおいて,

$$\begin{cases} x_1=-9-5s, \\ x_2=s, \\ x_3=4, \\ x_4=0. \end{cases} \qquad \therefore \boxed{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \quad (s \text{ は任意定数}).$$