

数学演習第一・中間統一試験【問題用紙】

2020年9月18日実施・試験時間90分

— 解答用紙には答えのみ記入せよ —

1 逆三角関数について次の問いに答えよ。

- (1) $\sin^{-1}\left(\sin \frac{34\pi}{11}\right)$ の値を求めよ。 (2) $\cos^{-1}\left(\sqrt{6} \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8}\right)$ の値を求めよ。
(3) $\tan^{-1} x + \tan^{-1}(1 - x^2) = \frac{\pi}{4}$ を満たす実数 x をすべて求めよ。

2 次の極限值を求めよ。

- (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x(1 - \cos x)}$ (5) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2^x + 3^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ (6) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x\left(\frac{\pi}{2} + \tan^{-1} 2x\right)}$

3 次の関数(括弧内が定義域)の導関数を整理された形で求めよ。

- (7) $x^x \log x$ ($x > 0$) (8) $\sin(\cos^{-1} x)$ ($-1 < x < 1$) (9) $\sin^{-1} \sqrt{1 - x^2}$ ($-1 < x < 0$)

4 (10) 関数 $f(x) = \frac{|x+1|}{x^2+8}$ の極値を求めよ。ただし、各極値 b に対し「 $x = a$ で極大値(or 極小値) b をとる」という形で答えること。

5 空間の3点 $A(1, 2, 4)$, $B(2, -1, 3)$, $C(1, -2, 2)$ を通る平面を P とするとき、以下の問いに答えよ。

- (11) 三角形 ABC の面積を求めよ。 (12) 平面 P の方程式を整理された形で求めよ。
(13) 原点 O から平面 P に垂線 OH を下ろすとき、垂線 OH の長さを求めよ。

6 $A = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ とするとき、以下の問いに答えよ。

- (14) $P^{-1}AP$ を求めよ。 (15) $Ax = 2x$ を満たす2次元ベクトル x をすべて求めよ。

7 (16) 行列 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ -1 & a & -a \\ a+1 & a-1 & 2 \end{bmatrix}$ の階数を求めよ (a の値によって場合分け)。

8 同次連立1次方程式 $\begin{cases} 2x + 5y + kz = 0 \\ 3x + 2y + 5z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$ について次の問いに答えよ。

- (17) 無数の解をもつための k の条件を求めよ。
(18) k が (17) の条件を満たすとき、基本解を求めよ。

9 連立1次方程式 $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 3 \\ 3x_1 + 15x_2 + 7x_3 + 9x_4 = 1 \\ 2x_1 + 10x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 2 \\ 5x_1 + 25x_2 + 11x_3 + 16x_4 = -1 \end{cases}$ について次の問いに答えよ。

- (19) 拡大係数行列の簡約行列を求めよ。
(20) 解を求めよ。ただし、無数の解をもつならば、任意定数(パラメータ)の取り方は標準的な方法、すなわち線形代数の教科書に書かれている方法(= 演習の解答例の方法)に従え。また、任意定数の文字は s, t, \dots を用いよ。