数学演習第一・期末統一試験【解説】

2020 年 9 月 23 日実施 ・ 試験時間 90 分

$\boxed{1}$ n を自然数とするとき，次の問いに答えよ．但し，解答は n で場合分けせず，整理された形で書くこと．

(1) $f(x)=\dfrac{1}{3x+1}$ の n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ．

【答】 $f^{(n)}(x)=3^n\cdot\dfrac{(-1)^n n!}{(3x+1)^{n+1}}=\boxed{\dfrac{(-3)^n n!}{(3x+1)^{n+1}}}$.

(2) $f(x)=x^2\sin 2x$ の n 次導関数を $f^{(n)}(x)=\boxed{}\sin\left(2x+\dfrac{n\pi}{2}\right)-n\,2^n x\cos\left(2x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$ の形に表したとき，枠内に入るべき x の多項式を求めよ．(問題文訂正済み)

【答】 ライプニッツの公式を用いて，

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x)&=x^2\,(\sin 2x)^{(n)}+n\cdot 2x\,(\sin 2x)^{(n-1)}+\frac{n(n-1)}{2}\cdot 2\,(\sin 2x)^{(n-2)}\\
&=x^2\cdot 2^n\sin\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)+2nx\cdot 2^{n-1}\sin\left(2x+\frac{(n-1)\pi}{2}\right)\\
&\qquad+n(n-1)\cdot 2^{n-2}\sin\left(2x+\frac{(n-2)\pi}{2}\right)\\
&=2^n x^2\sin\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)-2^n nx\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)-2^{n-2}n(n-1)\sin\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)\\
&\qquad(\sin(x-\tfrac{\pi}{2})=-\cos x,\ \sin(x-\pi)=-\sin x\ \text{を用いた})\\
&=\boxed{2^n x^2-2^{n-2}n(n-1)}\sin\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)-2^n nx\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right).
\end{aligned}$$

$\boxed{2}$ 次の関数 $f(x)$ について，$x=0$ における 3 次の漸近展開 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+o(x^3)$ $(x\to 0)$ の各次の係数を (a_0,a_1,a_2,a_3) の形で 記せ．例えば，$f(x)=1-2x^2+x^3+o(x^3)$ $(x\to 0)$ なら，$(1,0,-2,1)$ となる．

(3) $f(x)=\dfrac{4}{4+x}$

【答】 $\dfrac{1}{1+X}=1-X+X^2-X^3+o(X^3)\ (X\to 0)$ より，

$$f(x)=\frac{1}{1+\frac{x}{4}}=1-\frac{x}{4}+\left(\frac{x}{4}\right)^2-\left(\frac{x}{4}\right)^3+o(x^3)=1-\frac{x}{4}+\frac{x^2}{16}-\frac{x^3}{64}+o(x^3)\quad(x\to 0).$$

よって，$(a_0,\,a_1,\,a_2,\,a_3)=\boxed{\left(1,\,-\dfrac{1}{4},\,\dfrac{1}{16},-\dfrac{1}{64}\right)}$.

(4) $f(x)=\sqrt{1+2\sin x}$

【答】 $\sqrt{1+X}=1+\dfrac{1}{2}X+\dfrac{\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})}{2!}X^2+\dfrac{\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{3!}X^2=1+\dfrac{X}{2}-\dfrac{X^2}{8}+\dfrac{X^3}{16}+o(X^3)\ (X\to 0)$,
$\sin x=x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)\ (x\to 0)$ より，

$$\begin{aligned}
f(x)=\sqrt{1+2\sin x}&=\sqrt{1+\left(2x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)}\\
&=1+\frac{1}{2}\left(2x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)-\frac{1}{8}\left(2x+o(x^2)\right)^2+\frac{1}{16}\left(2x+o(x)\right)^3+o(x^3)\\
&=1+\left(x-\frac{x^3}{6}\right)-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+o(x^3)=1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\quad(x\to 0).
\end{aligned}$$

よって，$(a_0,\,a_1,\,a_2,\,a_3)=\boxed{\left(1,\,1,\,-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{3}\right)}$.

3 次の極限値を求めよ．

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2-x\log(1+x)}$

【答】 $x\to 0$ において，$\sin x = x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)$, $\log(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+(x^2)$ より，

$$\frac{x-\sin x}{x^2-x\log(1+x)}=\frac{x-(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))}{x^2-x(x-\frac{x^2}{2}+(x^2))}=\frac{\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{\frac{x^2}{2}+(x^3)}\xrightarrow{x\to 0}\boxed{\frac{1}{3}}.$$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x^2e^{2x}}{3x-\tan 3x}$

【答】 $x\to 0$ において，$e^x=1+x+o(x)$,

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}=\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)\left(1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)=x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

であるから，

$$\frac{x^2-x^2e^{2x}}{3x-\tan 3x}=\frac{x^2(1-e^{2x})}{3x-\tan 3x}=\frac{x^2\{1-(1+2x+o(x^2))\}}{3x-\{3x+\frac{(3x)^3}{3}+o(x^3)\}}=\frac{-2x^3+o(x^3)}{-9x^3+o(x^3)}\xrightarrow{x\to 0}\boxed{\frac{2}{9}}.$$

4 次の定積分を求めよ．

(7) $\displaystyle\int_5^7\frac{x+1}{x^2-9}\,dx$

【答】 $\dfrac{x+1}{x^2-9}=\dfrac{x+1}{(x+3)(x-3)}=\dfrac{a}{x+3}+\dfrac{b}{x-3}$ と分解できる．このとき，$x+1=a(x-3)+b(x+3)$ が恒等式となるから，$a+b=1$, $-3a+3b=1$．これを解いて，$a=\dfrac{1}{3}$, $b=\dfrac{2}{3}$．よって，

$$\int_5^7\frac{x+1}{x^2-9}\,dx=\frac{1}{3}\int_5^7\left(\frac{1}{x+3}+\frac{2}{x-3}\right)dx=\frac{1}{3}\Big[\log\{(x+3)(x-3)^2\}\Big]_5^7=\frac{1}{3}\log\frac{10\cdot 4^2}{8\cdot 2^2}=\boxed{\frac{1}{3}\log 5}.$$

［別法］ $\dfrac{x+1}{x^2-9}=\dfrac{1}{2}\dfrac{(x^2-9)'}{x^2-9}+\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x+3}\right)$ より，

$$\int_5^7\frac{x+1}{x^2-9}\,dx=\Big[\frac{1}{2}\log(x^2-9)+\frac{1}{6}\log\frac{x-3}{x+3}\Big]_5^7=\frac{1}{2}\log\frac{5}{2}+\frac{1}{6}\log\frac{8}{5}$$
$$=\frac{1}{2}(\log 5-\log 2)+\frac{1}{6}(3\log 2-\log 5)=\boxed{\frac{1}{3}\log 5}.$$

《注》log の真数に絶対値がついていないのは積分区間の上でそこに現れる関数がすべて正の値をとるから．

(8) $\displaystyle\int_1^2\frac{dx}{x+2\sqrt{x-1}}$

【答】 $\sqrt{x-1}=t$ とおけば，$x=t^2+1$, $dx=2t\,dt$ であるから，

$$\int\frac{dx}{x+2\sqrt{x-1}}=\int\frac{2t\,dt}{(t^2+1)+2t}=2\int\frac{(t+1)-1}{(t+1)^2}\,dt$$
$$=2\int\left\{\frac{1}{t+1}-\frac{1}{(t+1)^2}\right\}dt=2\left(\log|t+1|+\frac{1}{t+1}\right).$$

よって，

$$\int_1^2\frac{dx}{x+2\sqrt{x-1}}=2\Big[\log(t+1)+\frac{1}{t+1}\Big]_0^1=2\left(\log 2-\frac{1}{2}\right)=\boxed{2\log 2-1}.$$

(9) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1-\sin x}$

【答】 $\tan\dfrac{x}{2} = t$ とおけば, $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $dx = \dfrac{2\,dt}{1+t^2}$ より,

$$\int \frac{dx}{1-\sin x} = \int \frac{1}{1-\frac{2t}{1+t^2}}\,\frac{2\,dt}{1+t^2} = 2\int \frac{dt}{(t-1)^2} = -\frac{2}{t-1}.$$

よって,

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1-\sin x} = \left[-\frac{2}{t-1}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = -\frac{2}{\frac{1}{\sqrt{3}}-1} - 2 = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} - 2 = \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \boxed{\sqrt{3}+1}.$$

《注》 $\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$ も正解とした.

［別法］ $\dfrac{1}{1-\sin x} = \dfrac{1+\sin x}{1-\sin^2 x} = \dfrac{1+\sin x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x} - \dfrac{(\cos x)'}{\cos^2 x}$ より,

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1-\sin x} = \left[\tan x + \frac{1}{\cos x}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3} + (2-1) = \boxed{\sqrt{3}+1}.$$

(10) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} x^2\,\mathrm{Sin}^{-1}\,x\,dx$

【答】 部分積分により, $\displaystyle\int x^2\,\mathrm{Sin}^{-1}\,x\,dx = \frac{1}{3}x^3\,\mathrm{Sin}^{-1}\,x - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. ここで,

$$\begin{aligned}-\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \int x^2\cdot\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x^2\sqrt{1-x^2} - \int 2x\sqrt{1-x^2}\,dx \\ &= x^2\sqrt{1-x^2} + \frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}(x^2+2)\sqrt{1-x^2}\end{aligned}$$

であるから,

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} x^2\,\mathrm{Sin}^{-1}\,x\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\,\mathrm{Sin}^{-1}\,x + \frac{1}{9}(x^2+2)\sqrt{1-x^2}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \boxed{\frac{\pi}{8\sqrt{3}} - \frac{5}{72}}.$$

［別法］$x = \sin\theta$ とおけば, $dx = \cos\theta\,d\theta$ より,

$$\int x^2\,\mathrm{Sin}^{-1}\,x\,dx = \int \theta\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta = \frac{1}{3}\int \theta(\sin^3\theta)'\,d\theta = \frac{1}{3}\Bigl(\theta\sin^3\theta - \int \sin^3\theta\,d\theta\Bigr).$$

ここで,

$$\int \sin^3\theta\,d\theta = \int (1-\cos^2\theta)\sin\theta\,d\theta = \int (\cos^2\theta - 1)\,(\cos\theta)'\,d\theta = \frac{1}{3}\cos^3\theta - \cos\theta$$

であるから,

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} x^2\,\mathrm{Sin}^{-1}\,x\,dx = \frac{1}{9}\Bigl[3\theta\sin^3\theta - \cos^3\theta + 3\cos\theta\Bigr]_0^{\frac{\pi}{3}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}\,\pi}{24} - \frac{5}{72}}.$$

5 次の行列の逆行列を求めよ.

(11) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

【答】

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1 & 1 & -1/2 & 1/2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & -1 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right]$$

であるから, $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \boxed{\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}.$

(12) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & -1 \\ -2 & -6 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

【答】 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$ とおいて, $\begin{bmatrix} A & O \\ B & A \end{bmatrix}$ の逆行列を $\begin{bmatrix} X & O \\ Y & X \end{bmatrix}$ の形で探す.

$$\begin{bmatrix} E & O \\ O & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & O \\ B & A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X & O \\ Y & X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AX & O \\ BX + AY & AX \end{bmatrix}$$

であるとすれば,

$$\begin{aligned} X &= A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \\ Y &= -A^{-1}BX = -A^{-1}BA^{-1} = -\frac{1}{25}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{25}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -7 & -14 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

よって, $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & -1 \\ -2 & -6 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} X & O \\ Y & X \end{bmatrix} = \boxed{\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & -1 & 2 \end{bmatrix}}$.

［別法］ $\left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -6 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -6 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & -1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & -1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 2 & 2 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & -5 & -4 & -7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -2 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 2 & 2 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 10 & -5 & -4 & -7 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & \frac{2}{5} & 3 & -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{5} & -1 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & -7 & 1 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & \frac{2}{5} & 3 & -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{5} & -1 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{7}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$

$\to \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{7}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{array}\right]$. よって, $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & -1 \\ -2 & -6 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \boxed{\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{7}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}}$.

6 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 100 & 2 & 0 & 0 \\ 101 & 102 & 3 & 0 \\ 103 & 104 & 105 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 5 \\ 6 & 3 & 2 & -7 \\ -3 & 4 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ に対して次の行列式の値を求めよ.

(13) $|-2A|$

【答】 $|A| = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ より, $|-2A| = (-2)^4|A| = 16 \cdot 24 = \boxed{384}$.

(14) $|B|$

【答】 $|B| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 & 5 \\ 6 & 3 & 2 & -7 \\ -3 & 4 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 & 5 \\ 9 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-2)\begin{vmatrix} 9 & 4 & -2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2)\begin{vmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 0 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$$= (-6)\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -6 \cdot 28 = \boxed{-168}.$$

(15) $|{}^{\mathrm{t}}A\,B^{-1}|$

【答】 $|{}^{\mathrm{t}}A\,B^{-1}| = |A|\,|B|^{-1} = \dfrac{24}{-168} = \boxed{-\dfrac{1}{7}}.$

7 行列 $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ に対して次の問いに答えよ.

(16) A の余因子行列 $\widetilde{A}$ を求めよ.

【答】 A の (i,j) 余因子を $\widetilde{a}_{ij}$ と書けば,

$$\widetilde{a}_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad \widetilde{a}_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad \widetilde{a}_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2,$$

$$\widetilde{a}_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 3, \quad \widetilde{a}_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad \widetilde{a}_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 6,$$

$$\widetilde{a}_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4, \quad \widetilde{a}_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2, \quad \widetilde{a}_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7.$$

よって, $\widetilde{A} = \begin{bmatrix} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{21} & \widetilde{a}_{31} \\ \widetilde{a}_{12} & \widetilde{a}_{22} & \widetilde{a}_{32} \\ \widetilde{a}_{13} & \widetilde{a}_{23} & \widetilde{a}_{33} \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 2 \\ -2 & 6 & 7 \end{bmatrix}}.$

(17) A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

【答】 $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -7 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -7 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3$ および $A\widetilde{A} = |A|E$ より,

$$A^{-1} = |A|^{-1}\widetilde{A} = \boxed{\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 2 \\ -2 & 6 & 7 \end{bmatrix}}.$$

(18) $B = 7\widetilde{A}$ とおく. B の余因子行列 $\widetilde{B}$ を A を用いて表せ.

【答】 まず, $B\widetilde{B} = |B|E$ より, $\widetilde{B} = |B|B^{-1} = |7\widetilde{A}|(7\widetilde{A})^{-1} = 7^3|\widetilde{A}| \cdot 7^{-1}(\widetilde{A})^{-1} = 49|\widetilde{A}|(\widetilde{A})^{-1}$. ここで, $\widetilde{A} = |A|A^{-1}$ より, $|\widetilde{A}| = |A|^3|A^{-1}| = |A|^3|A|^{-1} = |A|^2$, $(\widetilde{A})^{-1} = |A|^{-1}A$. よって,

$$\widetilde{B} = 49|\widetilde{A}|(\widetilde{A})^{-1} = 49|A|^2|A|^{-1}A = 49|A|A = 49 \cdot 3A = \boxed{147A}.$$

8 次の問いに答えよ.

(19) 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$ を因数分解した形で求めよ.

【答】 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ (b-a)(b+a) & (c-a)(c+a) \end{vmatrix}$

$$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix} = \boxed{(a-b)(b-c)(c-a)}.$$

(20) 連立 1 次方程式 $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -\dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{5} + \dfrac{z}{7} = 1 \\ \dfrac{x}{9} + \dfrac{y}{25} + \dfrac{z}{49} = 1 \end{cases}$ の解 (x, y, z) のうち，$\underline{y \text{ の値}}$ を求めよ．

【答】 クラメールの公式により，

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{7} \\ (-\frac{1}{3})^2 & 1 & (\frac{1}{7})^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{7} \\ (-\frac{1}{3})^2 & (-\frac{1}{5})^2 & (\frac{1}{7})^2 \end{vmatrix}} = \frac{(-\frac{1}{3} - 1)(1 - \frac{1}{7})(\frac{1}{7} + \frac{1}{3})}{(-\frac{1}{3} + \frac{1}{5})(-\frac{1}{5} - \frac{1}{7})(\frac{1}{7} + \frac{1}{3})} = \frac{(-\frac{1}{3} - 1)(1 - \frac{1}{7})}{(-\frac{1}{3} + \frac{1}{5})(-\frac{1}{5} - \frac{1}{7})}$$

$$= \frac{(-5 - 15)(35 - 5)}{(-5 + 3)(-7 - 5)} = \frac{-20 \cdot 30}{2 \cdot 12} = \boxed{-25}.$$