

数学演習第一・期末統一試験【問題用紙】

2020年9月23日実施・試験時間90分

— 解答用紙には答えのみを整理された形で記入せよ —

1 n を自然数とするとき、次の問いに答えよ。但し、解答は n で場合分けせず、整理された形で書くこと。

(1) $f(x) = \frac{1}{3x+1}$ の n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ。

(2) $f(x) = x^2 \sin 2x$ の n 次導関数を $f^{(n)}(x) = \boxed{} \sin\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right) - n 2^n x \cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right)$ の形に表したとき、枠内に入るべき x の多項式を求めよ。(問題文訂正済み)

2 次の関数 $f(x)$ について、 $x=0$ における3次の漸近展開 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + o(x^3)$ ($x \rightarrow 0$) の各次の係数を (a_0, a_1, a_2, a_3) の形で記せ。例えば、 $f(x) = 1 - 2x^2 + x^3 + o(x^3)$ ($x \rightarrow 0$) なら、 $(1, 0, -2, 1)$ となる。

(3) $f(x) = \frac{4}{4+x}$

(4) $f(x) = \sqrt{1+2\sin x}$

3 次の極限値を求めよ。

(5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2 - x \log(1+x)}$

(6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x^2 e^{2x}}{3x - \tan 3x}$

4 次の定積分を求めよ。

(7) $\int_5^7 \frac{x+1}{x^2-9} dx$

(8) $\int_1^2 \frac{dx}{x+2\sqrt{x-1}}$

(9) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1-\sin x}$

(10) $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} x^2 \sin^{-1} x dx$

5 次の行列の逆行列を求めよ。

(11) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(12) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & -1 \\ -2 & -6 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

6 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 100 & 2 & 0 & 0 \\ 101 & 102 & 3 & 0 \\ 103 & 104 & 105 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 5 \\ 6 & 3 & 2 & -7 \\ -3 & 4 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ に対して次の行列式の値を求めよ。

(13) $|-2A|$

(14) $|B|$

(15) $|{}^t A B^{-1}|$

7 行列 $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ に対して次の問いに答えよ。

(16) A の余因子行列 \tilde{A} を求めよ。

(17) A の逆行列 A^{-1} を求めよ。

(18) $B = 7\tilde{A}$ とおく。 B の余因子行列 \tilde{B} を A を用いて表せ。

8 次の問いに答えよ。

(19) 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$ を因数分解した形で求めよ。

(20) 連立1次方程式 $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -\frac{x}{3} - \frac{y}{5} + \frac{z}{7} = 1 \\ \frac{x}{9} + \frac{y}{25} + \frac{z}{49} = 1 \end{cases}$ の解 (x, y, z) のうち、 y の値 を求めよ。