数学演習第二（演習第１回）

微積・線形：前学期の復習（広義積分を含む）

2020 年 10 月 7 日

【要点】

〈広義積分の定義〉

1. $[a,\infty)$ での連続関数 $f(x)$ に対し，区間 $[a,\beta]$ での積分 $\int_a^\beta f(x)dx$ を考える．$\displaystyle\lim_{\beta\to\infty}\int_a^\beta f(x)dx$ が収束するとき広義積分 $\int_a^\infty f(x)dx$ を $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{\beta\to\infty}\int_a^\beta f(x)dx$ で定義する．

2. $(-\infty,b]$ での連続関数 $f(x)$ に対し，区間 $[\alpha,b]$ での積分 $\int_\alpha^b f(x)dx$ を考える．$\displaystyle\lim_{\alpha\to-\infty}\int_\alpha^b f(x)dx$ が収束するとき広義積分 $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ を $\displaystyle\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{\alpha\to-\infty}\int_\alpha^b f(x)dx$ で定義する．

3. $[a,b)$ での連続関数 $f(x)$ に対し，区間 $[a,\beta]$ $(\beta<b)$ での積分 $\int_a^\beta f(x)dx$ を考える．$\displaystyle\lim_{\beta\to b-0}\int_a^\beta f(x)dx$ が収束するとき広義積分 $\int_a^b f(x)dx$ を $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \lim_{\beta\to b-0}\int_a^\beta f(x)dx$ で定義する．

4. $(a,b]$ での連続関数 $f(x)$ に対し，区間 $[\alpha,b]$ $(a<\alpha)$ での積分 $\int_\alpha^b f(x)dx$ を考える．$\displaystyle\lim_{\alpha\to a+0}\int_\alpha^b f(x)dx$ が収束するとき広義積分 $\int_a^b f(x)dx$ を $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \lim_{\alpha\to a+0}\int_\alpha^b f(x)dx$ で定義する．

5. (a,b) での連続関数 $f(x)$ を考える．このとき適当な点 c $(a<c<b)$ に対し広義積分 $\int_a^c f(x)dx$, $\int_c^b f(x)dx$ が存在するとき広義積分 $\int_a^b f(x)dx$ を $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ で定義する．ここで，積分値は c の取り方に関係しないことに注意する．

〈広義積分の例〉

<u>例１</u>

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\beta\to1-0}\int_0^\beta \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\beta\to1-0}\left[-2\sqrt{1-x}\right]_0^\beta$$
$$= \lim_{\beta\to1-0}(-2\sqrt{1-\beta}+2) = 2$$
$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{\beta\to\infty}\int_1^\beta \frac{dx}{x^2} = \lim_{\beta\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^\beta = \lim_{\beta\to\infty}\left(1-\frac{1}{\beta}\right) = 1$$

<u>例２</u>

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$= \lim_{\alpha\to-1+0}\left[\mathrm{Sin}^{-1}x\right]_\alpha^0 + \lim_{\beta\to1-0}\left[\mathrm{Sin}^{-1}x\right]_0^\beta$$
$$= -\mathrm{Sin}^{-1}(-1) + \mathrm{Sin}^{-1}1 = \pi$$

<u>例３</u>　実数 a, b, k に対して，$a<b$ のとき

$$\int_a^b (b-x)^k\,dx = \int_a^b (x-a)^k\,dx = \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{k+1}}{k+1} & (k>-1) \\ \infty & (k\le-1) \end{cases}$$

【レポート課題（答案をオンライン提出する問題)】

問 $\boxed{1}$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \\ 5 & -2 & 7 & 4 \end{bmatrix}$ の階数を求めよ．

問 $\boxed{2}$ 連立１次方程式 $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - 12x_3 + 4x_4 = 5 \\ 5x_1 + 11x_2 - 3x_3 - 6x_4 = 8 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 15 \end{cases}$ の解を求めよ．

問 $\boxed{3}$ 連立１次方程式 $\begin{cases} 6x_1 - 3x_2 + 9x_3 = -3 \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = a \end{cases}$ が解を持つための条件を求めよ．

問 $\boxed{4}$ $\begin{bmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \end{bmatrix}$ の逆行列を求めよ．

問 $\boxed{5}$ $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ の行列式の値を求めよ．

問 $\boxed{6}$ $\mathrm{Sin}^{-1}\left(\cos\dfrac{11\pi}{7}\right)$ の値を求めよ．

問 $\boxed{7}$ 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x} - \cos 2x}{\tan x}$ を求めよ．

問 $\boxed{8}$ $x = 0$ の近くで関数 $\dfrac{1}{1+\sin x}$ を４次の項まで漸近展開せよ．つまり，定数 a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 を計算し，

$$\frac{1}{1+\sin x} = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3 + a_4\,x^4 + o(x^4) \quad (x \to 0)$$

の形に表せ．

問 $\boxed{9}$ 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ の値を求めよ．

問 $\boxed{10}$ 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(\log(1+x))^p}$ が収束するような正の実数 p の範囲を求めよ．

【それ以外の自主学習用問題（提出不要）】

1 次の連立一次方程式を解け．

$$(1)\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ 5x_1 + 10x_2 + 6x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 6x_4 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + 13x_3 + 9x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 12x_3 + 9x_4 = 0 \end{cases}$$

$$(3)\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -10 \\ -3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -6 \end{cases}$$

$$(4)\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 3x_4 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 6x_4 = -4 \end{cases}$$

2 次の同次連立一次方程式が非自明な解を持つための条件を求めよ．

$$(1)\ \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 0 \\ 3x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - (5+a)x_3 = 0 \\ 6x_1 + (4-a)x_2 - 6x_3 = 0 \\ (1-a)x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

3 次の連立一次方程式が解を持つための条件を求めよ．

$$(1)\ \begin{cases} 5x_1 + 17x_2 - 13x_3 = 2 \\ 4x_1 + 14x_2 - 12x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = a \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 = p \\ -x_1 + 5x_2 - 7x_3 + 4x_4 = q \\ 6x_1 + x_2 + 11x_3 + 7x_4 = r \\ -3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 = s \end{cases}$$

4 次の行列の階数を求めよ．また正則な場合には逆行列を求めよ．

$$(1)\ \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 9 & 9 \\ 3 & 14 & 14 \end{bmatrix} \quad (2)\ \begin{bmatrix} 6 & 3 & -4 \\ -4 & 1 & -6 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix} \quad (3)\ \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

5 次の行列の行列式を求めよ．

$$(1)\begin{vmatrix} \lambda-5 & -4 & -3 \\ 1 & \lambda & 3 \\ -1 & 2 & \lambda-1 \end{vmatrix} \qquad (2)\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 6 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$(3)\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & 17 & 2 & 4 \\ 2 & 11 & 4 & -3 \\ 4 & 23 & -1 & 2 \end{vmatrix} \qquad (4)\begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 & -4 & -1 \\ 5 & \lambda+2 & 8 & -1 \\ -2 & 0 & \lambda-4 & 2 \\ -5 & -2 & -8 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ 次の値を求めよ.

(1) $2\ \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{2}-\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{7}$　　(2) $\cos\left(\mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{15}\right)$

$\boxed{\mathbf{7}}$ 次の導関数または高階導関数を求めよ.

(1) $f(x)=\mathrm{Tan}^{-1}(x^2+1)$ に対する $f'(x)$　　(2) $f(x)=\log|x^3-3x+2|$ に対する $f^{(n)}(x)$

(3) $f(x)=x^2\sin x$ に対する $f^{(n)}(x)$

$\boxed{\mathbf{8}}$ $x=0$ のまわりで次の関数を 4 次の項まで漸近展開せよ.

(1) $\dfrac{e^{x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$　　(2) $\log(x+\sqrt{1+x^2})$

$\boxed{\mathbf{9}}$ 次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{6\sin x-6x+x^3}{xe^{x^2}-x-x^3}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{Tan}^{-1}x-x}{x^3}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(a\mathrm{Tan}^{-1}x\right)^x$ ($a>0$ は定数)　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

$\boxed{\mathbf{10}}$ 次の不定積分または定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int x^2\mathrm{Tan}^{-1}x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^2\frac{6x+1}{3x^2+x-2}dx$　　(3) $\displaystyle\int_0^{\pi/3}\frac{dx}{1+2\cos x}$

(4) $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$　　(5) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x}{e^x}dx$