数学演習第二（演習第１回）解答例

【レポート課題（答案をオンライン提出する問題）の解答例】

問 $\boxed{1}$ $\begin{bmatrix}1&2&3&-2\\2&-1&4&1\\3&1&-1&4\\5&-2&7&4\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&3&-2\\0&-5&-2&5\\0&-5&-10&10\\0&-12&-8&14\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&3&-2\\0&1&2&-2\\0&5&2&-5\\0&6&4&-7\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&-1&2\\0&1&2&-2\\0&0&-8&5\\0&0&-8&5\end{bmatrix}\longrightarrow$

$\begin{bmatrix}1&0&-1&2\\0&1&2&-2\\0&0&-8&5\\0&0&0&0\end{bmatrix}$. よって，求める階数は 3.

問 $\boxed{2}$ 与えられた連立１次方程式の拡大係数行列を簡約化すると

$\begin{bmatrix}1&3&1&-2&0\\3&-1&-12&4&5\\5&11&-3&-6&8\\2&1&-3&6&15\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&3&1&-2&0\\0&-10&-15&10&5\\0&-4&-8&4&8\\0&-5&-5&10&15\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&3&1&-2&0\\0&1&2&-1&-2\\0&1&1&-2&-3\\0&2&3&-2&-1\end{bmatrix}$

$\longrightarrow\begin{bmatrix}1&3&1&-2&0\\0&1&1&-2&-3\\0&1&2&-1&-2\\0&2&3&-2&-1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&-2&4&9\\0&1&1&-2&-3\\0&0&1&1&1\\0&0&1&2&5\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&6&11\\0&1&0&-3&-4\\0&0&1&1&1\\0&0&0&1&4\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&0&-13\\0&1&0&0&8\\0&0&1&0&-3\\0&0&0&1&4\end{bmatrix}.$

よって，求める解は $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-13\\8\\-3\\4\end{bmatrix}$.

問 $\boxed{3}$ 与えられた連立１次方程式の拡大係数行列を簡約化すると

$\begin{bmatrix}6&-3&9&-3\\5&2&3&2\\4&3&1&a\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}2&-1&3&-1\\5&2&3&2\\4&3&1&a\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&4&-3&4\\2&-1&3&-1\\0&5&-5&a+2\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&4&-3&4\\0&-9&9&-9\\0&5&-5&a+2\end{bmatrix}\longrightarrow$

$\begin{bmatrix}1&4&-3&4\\0&1&-1&1\\0&5&-5&a+2\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&-1&1\\0&0&0&a-3\end{bmatrix}.$

ここで連立１次方程式が解を持つための条件は係数行列の階数と拡大係数行列の階数が等しいこと.

よって，求める条件は $a=3$.

問 $\boxed{4}$ $\begin{bmatrix}-2&3&-2&1&0&0\\4&-5&2&0&1&0\\3&-5&6&0&0&1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&-2&4&1&0&1\\0&1&-2&2&1&0\\-2&3&-2&1&0&0\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&-2&4&1&0&1\\0&1&-2&2&1&0\\0&-1&6&3&0&2\end{bmatrix}\longrightarrow$

$\begin{bmatrix}1&0&0&5&2&1\\0&1&-2&2&1&0\\0&0&4&5&1&2\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&5&2&1\\0&1&-2&2&1&0\\0&0&1&\frac{5}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&5&2&1\\0&1&0&\frac{9}{2}&\frac{3}{2}&1\\0&0&1&\frac{5}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}.$

よって，求める逆行列は $\begin{bmatrix}5&2&1\\\frac{9}{2}&\frac{3}{2}&1\\\frac{5}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$.

問 $\boxed{5}$ $\begin{vmatrix}2&-1&3&5\\3&2&3&-1\\4&3&1&5\\4&2&4&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&-1&3&5\\1&3&0&-6\\0&5&-5&-5\\0&4&-2&-7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-7&3&17\\1&3&0&-6\\0&5&-5&-5\\0&4&-2&-7\end{vmatrix}=-5\begin{vmatrix}-7&3&17\\1&-1&-1\\4&-2&-7\end{vmatrix}=$

$-5\begin{vmatrix}0&-4&10\\1&-1&-1\\0&2&-3\end{vmatrix}=5\begin{vmatrix}-4&10\\2&-3\end{vmatrix}=5(12-20)=-40.$

よって，求める行列式の値は -40.

問 $\boxed{6}$ $\mathrm{Sin}^{-1}\left(\cos\dfrac{11\pi}{7}\right)=\theta$ とおくと $-\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$ かつ $\sin\theta=\cos\dfrac{11\pi}{7}$.
ここで，$\cos(2\pi-x)=\cos x=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$ を用いると

$$\sin\theta=\cos\left(2-\frac{11}{7}\right)\pi=\cos\frac{3\pi}{7}=\sin\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{7}\right)\pi=\sin\frac{\pi}{14}$$

よって，求める値は $\dfrac{\pi}{14}$.

問 $\boxed{7}$ ロピタルの定理を使えば $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-\cos 2x}{\tan x}=\lim_{x\to0}(3e^{3x}+2\sin 2x)(\cos^2 x)=3e^0=3.$
よって，求める値は 3. また，$\frac{e^{3x}-\cos 2x}{\tan x}=(\cos x)\frac{x}{\sin x}\left(\frac{3(e^{3x}-1)}{3x}+\frac{\sin 2x}{2x}\frac{2\sin 2x}{1+\cos 2x}\right)$ で計算してもよい.

問 $\boxed{8}$ $\sin x=x-\dfrac{1}{6}x^3+o(x^4)$, $\dfrac{1}{1+X}=1-X+X^2-X^3+X^4+o(X^4)$ より
$\dfrac{1}{1+\sin x}=1-\left(x-\dfrac{1}{6}x^3+o(x^4)\right)+\left(x-\dfrac{1}{6}x^3+o(x^4)\right)^2-\left(x-\dfrac{1}{6}x^3+o(x^4)\right)^3+\left(x-\dfrac{1}{6}x^3+o(x^4)\right)^4+$
$o(x^4)=1-\left(x-\dfrac{1}{6}x^3\right)+\left(x^2-\dfrac{1}{3}x^4\right)-x^3+x^4+o(x^4)=1-x+x^2-\dfrac{5}{6}x^3+\dfrac{2}{3}x^4+o(x^4).$
よって，求める漸近展開は $1-x+x^2-\dfrac{5}{6}x^3+\dfrac{2}{3}x^4+o(x^4)$.

問 $\boxed{9}$ $\displaystyle\int_0^\infty\frac{dx}{e^x+e^{-x}}=\lim_{\beta\to\infty}\int_0^\beta\frac{dx}{e^x+e^{-x}}=\lim_{\beta\to\infty}\left[\mathrm{Tan}^{-1}(e^x)\right]_0^\beta=\frac{\pi}{2}-\mathrm{Tan}^{-1}1=\frac{\pi}{4}.$
よって，求める値は $\dfrac{\pi}{4}$. 実直にするならば，$e^x=t$ と置換して計算したらよい.

問 $\boxed{10}$ $\dfrac{o(x)}{x}\to0$, $\log(1+x)=x\left(1+\dfrac{o(x)}{x}\right)$ $(x\to0)$ より，不等式

$$Cx<\log(1+x)<Dx\quad(0<x<r<1)$$

をみたすような正の定数 C, D, r が存在するから，$p>0$ に対して，不等式

$$\frac{1}{D^p}\int_0^r x^{-p}\,dx\le\int_0^r\frac{dx}{(\log(1+x))^p}\le\frac{1}{C^p}\int_0^r x^{-p}\,dx$$

が成り立つ．ここで

$$\int_0^r x^{-p}\,dx=\lim_{\alpha\to+0}\int_\alpha^r x^{-p}\,dx=\begin{cases}\dfrac{r^{1-p}}{1-p} & (p<1)\\ \infty & (p\ge1)\end{cases}$$

一方，定積分 $\displaystyle\int_r^1\frac{dx}{(\log(1+x))^p}$ は常に存在する．よって，求める p の範囲は $0<p<1$.
なお，よく知られた不等式 $x-\dfrac{x^2}{2}<\log(1+x)<x$ $(x>0)$ から，例えば，$C=\dfrac{1}{2}$, $D\ge1$, $r\in(0,1)$ でよい．r を十分小さくとれば，$C\in(0,1)$ を任意に選べる．実際，$0<r<\min\{1,2(1-C)\}$ にとればよい．
また，関数 $y=\log(1+x)$ のグラフは上に凸であるので，$\log(1+x)$ $(0\le x\le1)$ は，上から原点 $(0,0)$ における接線で抑えられ，下からは 2 点 $(0,0)$, $(1,\log 2)$ を通る直線で評価される．つまり，不等式

$$(\log 2)\,x<\log(1+x)<x\quad(0<x<1)$$

が成り立つ．上述の議論から，$\log(1+x)$ でなくても，$f(x)=x+o(x)$ $(x\to0)$ となる $f(x)$ ならば，結論は全く同じである．例えば，$f(x)=e^x-1, \sin x, \tan x, \mathrm{Sin}^{-1}x, \mathrm{Tan}^{-1}x, \log(x+\sqrt{1+x^2})$ などである．

【それ以外の自主学習用問題の解答例】

$\boxed{1}$ (1) $\begin{bmatrix}1&2&1&-3&2\\3&6&4&2&-1\\5&10&6&-4&3\\2&4&3&5&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&1&-3&2\\0&0&1&11&-7\\0&0&1&11&-7\\0&0&1&11&-7\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&0&-14&9\\0&0&1&11&-7\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$ より，$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}14\\0\\-11\\1\\0\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}-9\\0\\7\\0\\1\end{bmatrix}$ $(c_1,c_2,c_3$は任意$)$．(2) $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}2\\-3\\1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}1\\-2\\0\\1\end{bmatrix}$ $(c_1,c_2$は任意$)$．(3) $\left[\begin{array}{ccc|c}2&-4&5&5\\1&3&-2&-10\\-3&-2&-4&-6\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&3&-2&-10\\0&-10&9&25\\0&7&-10&-36\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&3&-2&-10\\0&-3&-1&-11\\0&7&-10&-36\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-3&-21\\0&-3&-1&-11\\0&1&-12&-58\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-3&-21\\0&1&-12&-58\\0&0&-37&-185\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-6\\0&1&0&2\\0&0&1&5\end{array}\right]$ より，$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6\\2\\5\end{bmatrix}$．(4) $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-10\\4\\8\\3\end{bmatrix}$．$\boxed{2}$ (1) 係数行列が非正則，つまり行列式が 0 となるときであるから，$\begin{vmatrix}2&4&5\\3&7&2\\1&2&a\end{vmatrix}=2a-5$ より，$a=\dfrac{5}{2}$．(2) 係数行列の行列式は，$(a-4)(a+2)^2$ より，$a=4,-2$．$\boxed{3}$ (1) $\left[\begin{array}{ccc|c}5&17&-13&2\\4&14&-12&1\\2&5&2&a\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&3&-1&1\\4&14&-12&1\\2&5&2&a\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&3&-1&1\\0&2&-8&-3\\0&-1&4&a-2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&3&-1&1\\0&1&-4&2-a\\0&2&-8&-3\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&11&3a-5\\0&1&-4&2-a\\0&0&0&2a-7\end{array}\right]$ より，$a=\dfrac{7}{2}$．(2) $31p-16q-13r=0$．$\boxed{4}$ (1) $\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&4&5&1&0&0\\2&9&9&0&1&0\\3&14&14&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&4&5&1&0&0\\0&1&-1&-2&1&0\\0&2&-1&-3&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&9&9&-4&0\\0&1&-1&-2&1&0\\0&0&1&1&-2&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&14&-9\\0&1&0&-1&-1&1\\0&0&1&1&-2&1\end{array}\right]$ より，階数 3 で正則．逆行列は，$\begin{bmatrix}0&14&-9\\-1&-1&1\\1&-2&1\end{bmatrix}$．(2) 階数 2．(3) $\begin{bmatrix}1&-3&1&-3\\1&-2&2&-2\\2&-5&3&-5\\1&-1&3&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-3&1&-3\\0&1&1&1\\0&1&1&1\\0&2&2&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-3&1&-3\\0&1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ より，階数 3 で非正則．(4) 階数 4 で，逆行列は，$\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}5&-2&-1&0\\-2&3&0&-1\\-1&0&1&0\\0&-1&0&1\end{bmatrix}$．$\boxed{5}$ (1) $\begin{vmatrix}\lambda-5&-4&-3\\1&\lambda&3\\-1&2&\lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-4&\lambda-4&0\\1&\lambda&3\\0&\lambda+2&\lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda-4)(\lambda+2)\begin{vmatrix}1&1&0\\1&\lambda&3\\0&1&1\end{vmatrix}=(\lambda-4)(\lambda+2)\begin{vmatrix}1&1&0\\0&\lambda-1&3\\0&1&1\end{vmatrix}=(\lambda-4)^2(\lambda+2)$．(2) 55．(3) $\begin{vmatrix}1&5&3&2\\3&17&2&4\\2&11&4&-3\\4&23&-1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&5&3&2\\0&2&-7&-2\\0&1&-2&-7\\0&3&-13&-6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&-7&-2\\1&-2&-7\\3&-13&-6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-3&12\\1&-2&-7\\0&-7&15\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-3&12\\-7&15\end{vmatrix}=-(-45+84)=-39$．(4) $\lambda^2(\lambda-2)^2$．$\boxed{6}$ (1) $\alpha=\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{2}$，$\beta=\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{7}$ とおく．$0<\dfrac{1}{7}<\dfrac{1}{2}<1$

より $0<\beta<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$ となり，$0<2\alpha-\beta<\dfrac{\pi}{2}$．一方，$\tan 2\alpha=\dfrac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-(\frac{1}{2})^2}=\dfrac{4}{3}$，$\tan\beta=\dfrac{1}{7}$ より，$\tan(2\alpha-\beta)=\dfrac{\tan 2\alpha-\tan\beta}{1+\tan 2\alpha\tan\beta}=1$．よって，$2\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{4}$．(2) $\theta=\mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{15}$ とおくと，$\cos\theta=\dfrac{1}{4}$．
$\boxed{7}$ (1) $f'(x)=\dfrac{2x}{1+(x^2+1)^2}=\dfrac{2x}{x^4+2x^2+2}$．(2) $\log|x^3-3x+2|=2\log|x-1|+\log|x+2|$ だから，$n\geqq 1$ で，$f^{(n)}(x)=\dfrac{2(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x-1)^n}+\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+2)^n}=(-1)^{n-1}(n-1)!\left\{\dfrac{2}{(x-1)^n}+\dfrac{1}{(x+2)^n}\right\}$．
(3) ライプニッツの公式から，$f^{(n)}(x)=x^2(\sin x)^{(n)}+2nx(\sin x)^{(n-1)}+n(n-1)(\sin x)^{(n-2)}=x^2\sin\Big(x+\dfrac{n}{2}\pi\Big)+2nx\sin\Big(x+\dfrac{n-1}{2}\pi\Big)+n(n-1)\sin\Big(x+\dfrac{n-2}{2}\pi\Big)=\{x^2-n(n-1)\}\sin\Big(x+\dfrac{n}{2}\pi\Big)-2nx\cos\Big(x+\dfrac{n}{2}\pi\Big)$．$\boxed{8}$ いずれも $x\to 0$ で考える．(1) $e^{x^2}=1+x^2+\dfrac{1}{2}x^4+o(x^4)$，$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}=(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}=1-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{3}{8}x^4+o(x^4)$ だから，$\dfrac{e^{x^2}}{\sqrt{1+x^2}}=1+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{3}{8}x^4+o(x^4)$．(2) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}=1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^3)$ を積分して $x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^4)$．$\boxed{9}$ (1) $x\to 0$ で，$\sin x=x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}+o(x^5)$，$e^{x^2}=1+x^2+\dfrac{x^4}{2}+o(x^5)$ だから，分子 $=\dfrac{x^5}{20}+o(x^5)$．分母 $=\dfrac{x^5}{2}+o(x^5)$．よって求める極限値は $\dfrac{1}{10}$．(2) ロピタルの定理を適用して $-\dfrac{1}{3}$．(3) $\log(a\,\mathrm{Tan}^{-1}x)^x=x\log(a\,\mathrm{Tan}^{-1}x)$ において，$x\to\infty$ のとき $\log(a\,\mathrm{Tan}^{-1}x)\to\log\dfrac{\pi a}{2}\lesseqgtr 0$ $\left(a\lesseqgtr\dfrac{2}{\pi}\right)$ であるから，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\log(a\,\mathrm{Tan}^{-1}x)=-\infty$ $(0<a<\frac{2}{\pi})$，$=\infty$ $(a>\frac{2}{\pi})$．$a=\frac{2}{\pi}$ のときは不定形であり，ロピタルの定理により，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\log\Big(\frac{2}{\pi}\mathrm{Tan}^{-1}x\Big)=\lim_{x\to\infty}\frac{\log(\mathrm{Tan}^{-1}x)+\log\frac{2}{\pi}}{x^{-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\mathrm{Tan}^{-1}x}\frac{1}{x^2+1}}{-\frac{1}{x^2}}=-\frac{2}{\pi}$．よって求める極限値は $e^{-\frac{2}{\pi}}$．(4) $\dfrac{\tan x}{x}-1=\dfrac{x^2}{3}+o(x^2)$ と $\log(1+x)=x+o(x)$ から，$\log\Big(\dfrac{\tan x}{x}\Big)=\dfrac{x^2}{3}+o(x^2)$ より，極限値は $e^{\frac{1}{3}}$．$\boxed{10}$ (1) $\displaystyle\int\Big(\frac{x^3}{3}\Big)'\mathrm{Tan}^{-1}x\,dx=\frac{x^3}{3}\mathrm{Tan}^{-1}x-\frac{1}{3}\int\frac{x^3}{1+x^2}dx=\frac{x^3}{3}\mathrm{Tan}^{-1}x-\frac{1}{3}\int\Big(x-\frac{x}{1+x^2}\Big)dx$ $\displaystyle=\frac{x^3}{3}\mathrm{Tan}^{-1}x-\frac{x^2}{6}+\frac{1}{6}\log(1+x^2)+C$．
(2) $3x^2+x-2=t$ とおくと，$\displaystyle\int_1^2\frac{6x+1}{3x^2+x-2}dx=\int_2^{12}\frac{1}{t}dt=[\log t]_2^{12}=\log 6$．(3) $\tan\dfrac{x}{2}=t$ とおくと，$\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$，$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2}{1+t^2}$ より，$\displaystyle\int_0^{\pi/3}\frac{dx}{1+2\cos x}=\int_0^{\frac{1}{\sqrt3}}\frac{1}{1+2\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=\int_0^{\frac{1}{\sqrt3}}\frac{2}{3-t^2}dt=\frac{1}{\sqrt3}\int_0^{\frac{1}{\sqrt3}}\Big(\frac{1}{\sqrt3-t}+\frac{1}{\sqrt3+t}\Big)dt=\frac{1}{\sqrt3}\left[\log\frac{\sqrt3+t}{\sqrt3-t}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt3}}=\frac{\log 2}{\sqrt3}$．(4) 被積分関数は $x=0,1$ で発散しているので広義積分．$0<\varepsilon<a<1$ をとって，$\displaystyle\int_\varepsilon^a\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=\int_\varepsilon^a\frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-\big(x-\frac{1}{2}\big)^2}}=\big[\mathrm{Sin}^{-1}(2x-1)\big]_\varepsilon^a=\mathrm{Sin}^{-1}(2a-1)-\mathrm{Sin}^{-1}(2\varepsilon-1)$．ここで $a\to 1$ のとき，$\mathrm{Sin}^{-1}(2a-1)\to\mathrm{Sin}^{-1}1=\dfrac{\pi}{2}$．$\varepsilon\to 0$ のとき，$\mathrm{Sin}^{-1}(2\varepsilon-1)\to\mathrm{Sin}^{-1}(-1)=-\dfrac{\pi}{2}$．よって求める広義積分の値は π．
(5) 広義積分．$0<M$ をとって，$\displaystyle\int_0^M\frac{x}{e^x}dx$ を考える．$\displaystyle\int_0^M\frac{x}{e^x}dx=-\int_0^M x(e^{-x})'dx=-[xe^{-x}]_0^M+\int_0^M e^{-x}dx=-Me^{-M}-e^{-M}+1\to 1$ $(M\to+\infty)$．[注意] ロピタルの定理より $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$，これを用いた．