

数学演習第二 (演習第2回)

線形：直線・平面の方程式と外積 2020年10月14日

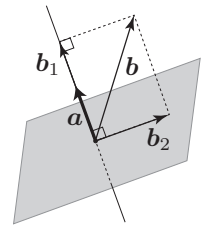
要点

A 内積・外積 (線形 p.4, pp.7-8)

空間ベクトル $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ に対して,

- (1) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} := a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$, $\|\mathbf{a}\| := \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ をそれぞれ \mathbf{a}, \mathbf{b} の内積, \mathbf{a} の長さ (大きさ, ノルム) という. $\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ のとき, \mathbf{a}, \mathbf{b} のなす角を $\theta \in [0, \pi]$ とすれば, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \theta$ が成り立つ. (平面ベクトルに対しても同様)

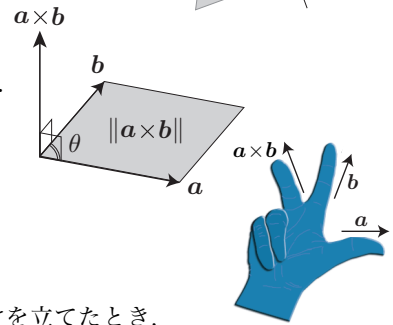
- (2) $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ のとき, \mathbf{b} は $\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$ ($\mathbf{b}_1 = t\mathbf{a}$, $\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{a} = 0$) の形に一意に分解できる (実際, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{a} = t\|\mathbf{a}\|^2$ より t が定まり, $\mathbf{b}_1 = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2} \mathbf{a}$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{b} - \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2} \mathbf{a}$ となる). このとき, \mathbf{b}_1 を \mathbf{b} の「 \mathbf{a} と平行な直線」への正射影 (または \mathbf{a} への正射影), \mathbf{b}_2 を \mathbf{b} の「 \mathbf{a} と垂直な平面」への正射影と呼ぶ.



- (3) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} := \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix}$ を \mathbf{a}, \mathbf{b} の外積 (= ベクトル積) と呼ぶ.

$\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ が平行でないとき, \mathbf{a}, \mathbf{b} のなす角を $\theta \in (0, \pi)$ とすれば,

- ① $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は \mathbf{a}, \mathbf{b} の両方と垂直,
- ② $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は右手系,
- ③ $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \theta = (\mathbf{a}, \mathbf{b}$ が作る平行四辺形の面積).



なお, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ が右手系 (をなす) とは, 右手の親指, 人差し指, 中指の3本だけを立てたとき, 3本の指が指す方向をこの順に $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ の方向に合わせることができるとをいう. 行列式を用いれば, $\det[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}] > 0$ であることに他ならない.

B 面積・体積 (線形 p.6, p.8, pp.85-86)

- (1) 平面ベクトル \mathbf{a}, \mathbf{b} に対して,

$$\mathbf{a}, \mathbf{b} \text{ の作る平行四辺形の面積 } S = |\det[\mathbf{a} \ \mathbf{b}]| \quad (= \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \theta = \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2}).$$

- (2) 空間ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ に対して,

$$\mathbf{a}, \mathbf{b} \text{ の作る平行四辺形の面積 } S = \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| \quad (= \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \theta = \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2}),$$

$$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ の作る平行六面体の体積 } V = |\det[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}]| \quad (= |(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}| = |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|).$$

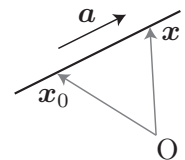
C 空間内の直線と平面 (線形 pp.10-13)

空間の点 $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$ とベクトル $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$ に対して,

- (1) 点 \mathbf{x}_0 を通り, \mathbf{a} を方向ベクトルとする直線 (\mathbf{a} と平行な直線) の方程式は,

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{a} \quad \left(\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \right) \text{ より, } \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

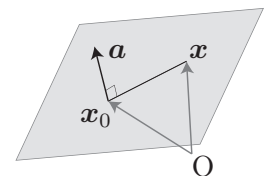
(右の表現は $abc \neq 0$ の場合の形. 例えば $ab \neq 0, c = 0$ なら, $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}, z = z_0$ となる.)



- (2) 点 \mathbf{x}_0 を通り, \mathbf{a} を法線ベクトルとする平面 (\mathbf{a} と垂直な平面) の方程式は,

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0, \quad \text{すなわち } a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

(右の表現は通常 $ax + by + cz + d = 0$ または $ax + by + cz = d$ の形に整理する.)



小テスト問題

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ に対して次の問いに答えよ.}$$

第1問 \mathbf{a}, \mathbf{b} のなす角を求めよ.

【選択肢】 (ア) $\frac{\pi}{4}$ (イ) $\frac{\pi}{3}$ (ウ) $\frac{2\pi}{3}$ (エ) $\frac{3\pi}{4}$

第2問 \mathbf{a}, \mathbf{b} の作る三角形の面積を求めよ.

【選択肢】 (ア) 3 (イ) $\frac{9}{2}$ (ウ) 9 (エ) $\frac{27}{2}$

第3問 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ の作る四面体の体積を求めよ.

【選択肢】 (ア) $\frac{1}{2}$ (イ) 1 (ウ) $\frac{3}{2}$ (エ) 3

第4問 \mathbf{a} の「 \mathbf{b}, \mathbf{c} に平行な平面」(= $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ に垂直な平面) への正射影を求めよ.

【選択肢】 (ア) $\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ (イ) $\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ (ウ) $\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ (エ) $\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix}$

レポート課題

答だけでなく、計算の過程も書いて下さい。(A4用紙1~2枚にまとめて提出)

I $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ とおくとき,

(i) $\mathbf{a} \times \mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解が存在するための \mathbf{b} の満たすべき条件を求めよ.

(ヒント: まず $A\mathbf{x} = \mathbf{a} \times \mathbf{x}$ となる行列 A を求めよ. 条件は b_3 を b_1, b_2 の式で表せ.)

(ii) \mathbf{b} が上の条件を満たすとき, $\mathbf{a} \times \mathbf{x} = \mathbf{b}$ を解け.

II 空間の3点 A(1, 0, 2), B(2, -3, 0), C(-1, 2, 1) について, 次の問いに答えよ.

(i) 平面 ABC の方程式を求めよ.

(ii) 原点 O から平面 ABC に垂線 OH を下ろすとき, 点 H の座標と垂線 OH の長さを求めよ.

演習問題

1 [内積・外積]

- (1) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ に対して, $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$, $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ を計算せよ.
- (2) $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ のとき, \mathbf{b} の「 \mathbf{a} と平行な直線」への正射影 \mathbf{b}_1 と \mathbf{b} の「 \mathbf{a} と垂直な平面」への正射影 \mathbf{b}_2 に対し, $\|\mathbf{b}_1\|$ と $\|\mathbf{b}_2\|$ を $\|\mathbf{a}\|, \|\mathbf{b}\|, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$ を用いて表せ (A (2) の説明も見よ).
- (3) (1) の \mathbf{u}, \mathbf{v} に対して, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, $\|\mathbf{u}\|, \|\mathbf{v}\|$, “ \mathbf{u}, \mathbf{v} のなす角”, “ \mathbf{v} の \mathbf{u} への正射影” を求めよ.
- (4) $\det[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}]$ ($\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$) を第 3 列に関して余因子展開して $\det[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}] = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ を示せ. 更に, この関係式を用いて, 次を示せ: ① $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = 0$, ② \mathbf{a}, \mathbf{b} が 1 次独立ならば $\det[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{a} \times \mathbf{b}] > 0$ (すなわち $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ が右手系).
- (5) $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, 3 次直交行列 Q ($\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} {}^t Q Q = Q {}^t Q = E$) に対して, $Q\mathbf{a} \cdot Q\mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ (従って $\|Q\mathbf{a}\| = \|\mathbf{a}\|$) 及び $Q\mathbf{a} \times Q\mathbf{b} = \pm Q(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ (\pm は $\det Q \in \{\pm 1\}$ の符号を表す) を示せ.

2 [空間内の直線と平面]

- (1) ① (2) を利用して次を示せ.
- ① 点 \mathbf{x}_1 と C (1) の直線の距離 (垂線の長さ) は $\frac{\|\mathbf{a} \times (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{a}\|}$ で与えられる.
- ② 点 \mathbf{x}_1 と C (2) の平面 $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0$ との距離 (垂線の長さ) は $\frac{|\mathbf{a} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{a}\|}$ で与えられる. 平面が $ax + by + cz + d = 0$ の形なら $\frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ (重要) となる.
- (2) $A(1, 1, 0)$, $B(2, -2, 3)$, $C(3, -1, 1)$, $D(-1, 3, 4)$ とする. ① 直線 AB (2 点 A, B を通る直線) の方程式を求めよ. ② 平面 ABC (3 点 A, B, C を通る平面) の方程式を求めよ. (まず法線ベクトル $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ を求めよ.) また, 点 D とこの平面の距離を求めよ. ③ 点 A を通る平面 ABC の法線 (l とする) の方程式を求めよ. また, 点 D と直線 l の距離を求めよ.
- 【注】②, ③ の距離は, それぞれ点 D から平面 ABC , 直線 l に下ろした垂線の長さに他ならない. この点に注目すれば (1) を利用しなくても計算できる (まず “垂線の足” の座標を求める).
- (3) 2 平面 $\alpha: x + y - 3z = 1$, $\beta: 2x + y + z = -1$ に対して, ① 2 平面 α, β の交線の方程式を求めよ. (交線上の点を連立 1 次方程式の解の集合と考えるとよい. あるいは, 交線の方法線ベクトルは 2 平面の法線ベクトルと直交することから得られ, 交線を通る点として例えば xy 平面との交点を考えるとよい.) ② 2 平面 α, β のなす角を求めよ.
- (4) 直線 $l: \frac{x-4}{5} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{-4}$ と平面 $\alpha: 5x - 4y - 3z = 5$ に対して, ① 直線 l と平面 α の交点 \mathbf{x}_0 を求めよ. ② 直線 l を平面 α 上に正射影して得られる直線 m (\mathbf{x}_0 を通り, “ l の方向ベクトルの平面 α への正射影” を方向ベクトルとする直線) の方程式を求めよ. ③ 2 直線 l, m のなす角 (= 直線 l と平面 α のなす角) を求めよ. ④ 2 直線 l, m を含む平面の方程式を求めよ.