数学演習第二（演習第２回）【解答例】

線形：直線・平面の方程式と外積　2020 年 10 月 14 日

小テスト問題

第 1 問　$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ より, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = -9$, $\|\boldsymbol{a}\| = 3$, $\|\boldsymbol{b}\| = 3\sqrt{2}$. なす角を $\theta \in [0, \pi]$ として,

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|} = \frac{-9}{3 \cdot 3\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}. \qquad \therefore\ \theta = \boxed{\frac{3\pi}{4}}. \quad \to \textbf{(エ)}\ \text{が正解}$$

第 2 問　$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ -6 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ より, 求める面積 S は,

$$S = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\| = \frac{3}{2}\sqrt{1+4+4} = \boxed{\frac{9}{2}}. \quad \to \textbf{(イ)}\ \text{が正解}$$

第 3 問　上の結果を用いて, 求める体積 V は

$$V = \frac{1}{6}|(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}| = \frac{1}{6}\left| 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right| = \boxed{\frac{3}{2}} \quad \to \textbf{(ウ)}\ \text{が正解}$$

勿論, $V = (1/6)|\det[\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}]|$ を計算してもよい.

第 4 問　まず, $\boldsymbol{d} := \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$. よって, $\boldsymbol{a}$ の $\boldsymbol{d}$ への正射影は $\dfrac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d}}{\|\boldsymbol{d}\|^2}\boldsymbol{d} = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ であるから, $\boldsymbol{a}$ の「$\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に平行な平面」への正射影は

$$\boldsymbol{a} - \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d}}{\|\boldsymbol{d}\|^2}\boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \boxed{\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -7 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}}. \quad \to \textbf{(ウ)}\ \text{が正解}$$

レポート課題

I (i) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2z-3y\\3x-z\\y-2x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-3&2\\3&0&-1\\-2&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ より, $A=\begin{bmatrix}0&-3&2\\3&0&-1\\-2&1&0\end{bmatrix}$ とおけば, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ は $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ と書ける. ここで, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ が解をもつための条件を調べるために, $\begin{bmatrix}A & \boldsymbol{b}\end{bmatrix}$ に行基本変形を施す.

$$\begin{bmatrix}A & \boldsymbol{b}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-3&2&b_1\\3&0&-1&b_2\\-2&1&0&b_3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&-3&2&b_1\\1&1&-1&b_2+b_3\\-2&1&0&b_3\end{bmatrix}$$
$$\to\begin{bmatrix}1&1&-1&b_2+b_3\\0&-3&2&b_1\\0&3&-2&2b_2+3b_3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-1&b_2+b_3\\0&-3&2&b_1\\0&0&0&b_1+2b_2+3b_3\end{bmatrix}.$$

よって, 解をもつための条件は $\boxed{b_3=-\dfrac{b_1+2b_2}{3}}$ が成り立つこと.

(ii) (i) の条件が満たされるとき, 上の基本変形を続けて,

$$\begin{bmatrix}A & \boldsymbol{b}\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-1&-\frac{1}{3}b_1+\frac{1}{3}b_2\\0&1&-\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}b_1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}b_2\\0&1&-\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}b_1\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

よって, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解は

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}b_2\\-\frac{1}{3}b_1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\\1\end{bmatrix}=\boxed{\begin{bmatrix}\frac{1}{3}b_2\\-\frac{1}{3}b_1\\0\end{bmatrix}+t_1\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}}\quad (t_1 \text{ は任意定数}).$$

II (i) まず, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{bmatrix}1\\-3\\-2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-2\\2\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\5\\-4\end{bmatrix}$. これが平面 ABC の法線ベクトルとなるから, その方程式は $7(x-1)+5y-4(z-2)=0$. 整理して, $\boxed{7x+5y-4z+1=0}$.

(ii) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は直線 OH の方向ベクトルでもあるから, $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=t\begin{bmatrix}7\\5\\-4\end{bmatrix}$ と書ける. このとき, $\mathrm{H}(7t,5t,-4t)$ が平面 ABC 上の点であるから, $(49+25+16)t+1=0$ となり, $t=-1/90$. よって, H の座標は $\boxed{\left(-\dfrac{7}{90},-\dfrac{1}{18},\dfrac{2}{45}\right)}$ であり, 垂線の長さは $|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=\dfrac{1}{90}\cdot\sqrt{90}=\boxed{\dfrac{1}{3\sqrt{10}}}$.

演習問題

$\boxed{1}$ (1) $(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}7\\-7\\-7\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})=\begin{bmatrix}1\\3\\-2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}4\\5\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\-7\\-7\end{bmatrix}$. (結合律は不成立!)

(2) $\boldsymbol{b}_1=\dfrac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{b}-\dfrac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a}$ より, $\|\boldsymbol{b}_1\|=\dfrac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|}{\|\boldsymbol{a}\|}$, $\|\boldsymbol{b}_2\|=\sqrt{\|\boldsymbol{b}\|^2-\|\boldsymbol{b}_1\|^2}=\dfrac{\sqrt{\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}}{\|\boldsymbol{a}\|}$ ($\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}$ が直角三角形をなすことに注意). ここまでは $\mathbb{R}^n$ $(n\geqslant 2)$ のベクトルで成立するが, $\|\boldsymbol{b}_2\|$ については, 空間ベクトルであれば外積を用いて $\|\boldsymbol{b}_2\|=\dfrac{\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{a}\|}$, 平面ベクトルであれば行列式を用いて $\|\boldsymbol{b}_2\|=\dfrac{|\det[\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}]|}{\|\boldsymbol{a}\|}$ と表せる.

(3) $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=2-3-6=-7$, $\|\boldsymbol{u}\|=\sqrt{14}$, $\|\boldsymbol{v}\|=\sqrt{14}$. また, $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ のなす角 θ $(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ は,

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|}=\frac{-7}{\sqrt{14}\sqrt{14}}=-\frac{1}{2}\quad\text{より},\quad\theta=\frac{2\pi}{3}.$$

更に, $\boldsymbol{v}$ の $\boldsymbol{u}$ 方向への正射影は $\dfrac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|^2}\boldsymbol{u}=\dfrac{-7}{14}\begin{bmatrix}1\\3\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{3}{2}\\1\end{bmatrix}$.

(4) $\det[\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}]=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}$ を第3列に関して余因子展開し, そのあと外積の定義を用いて,

$$\begin{aligned}\det[\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}]&=c_1\begin{vmatrix}a_2&b_2\\a_3&b_3\end{vmatrix}-c_2\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_3&b_3\end{vmatrix}+c_3\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}\\&=(a_2b_3-a_3b_2)c_1+(a_3b_1-a_1b_3)c_2+(a_1b_2-a_2b_1)c_3=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}.\end{aligned}$$

この関係式を用いて, ① $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=\det[\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{a}]=0$, $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=\det[\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{b}]=0$ (同じ列を含む行列式の値は 0). ② $\det[\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|^2\geqslant 0$. あとは $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ が1次独立のとき $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ を示す必要があるが, 図形的に考えれば $\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ の作る平行四辺形の面積$)$ なので, これは明らか.

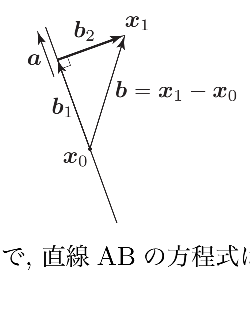
(5) 一般に $P\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot{}^{\mathrm{t}}P\boldsymbol{b}$ が成り立つ. これを用いて, $Q\boldsymbol{a}\cdot Q\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot{}^{\mathrm{t}}QQ\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$. 更に, $\forall\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^3$ に対して,

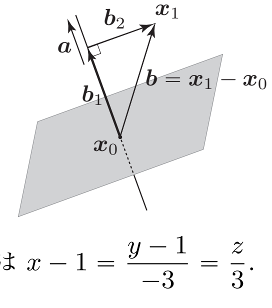
$$(Q\boldsymbol{a}\times Q\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\det[Q\boldsymbol{a}\ \ Q\boldsymbol{b}\ \ Q{}^{\mathrm{t}}Q\boldsymbol{c}]=(\det Q)\det[\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ {}^{\mathrm{t}}Q\boldsymbol{c}]=\pm(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot{}^{\mathrm{t}}Q\boldsymbol{c}=\pm Q(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$$

であるから, $Q\boldsymbol{a}\times Q\boldsymbol{b}=\pm Q(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ が従う.

$\boxed{2}$ (1) ① 点 $\boldsymbol{x}_1$ と $\boxed{\text{C}}$ (1) の直線との距離は $\boxed{1}$ (2) で $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0$ と考えたときの $\|\boldsymbol{b}_2\|$ に等しい (下左図). よって, 求める距離は $\dfrac{\|\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)\|}{\|\boldsymbol{a}\|}$. ("垂線の足" は $\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{x}_0+\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a}$.)

② 点 $\boldsymbol{x}_1$ と $\boxed{\text{C}}$ (2) の平面との距離は $\boxed{1}$ (2) で $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0$ と考えたときの $\|\boldsymbol{b}_1\|$ に等しい (下右図). よって, 求める距離は $\dfrac{|\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)|}{\|\boldsymbol{a}\|}$. ("垂線の足" は $\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{x}_1-\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a}$.) 平面が $ax+by+cz+d=0$ と表されるなら $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}_0+d=0$ であるから, $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}_1+d$ となり, 距離は $\dfrac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ と表される.





(2) ① $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{bmatrix}1\\-3\\3\end{bmatrix}$ が直線 AB の方向ベクトルを与えるので, 直線 AB の方程式は $x-1=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z}{3}$.

② $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{bmatrix}1\\-3\\3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\5\\4\end{bmatrix}$ が平面 ABC の法線ベクトルだから, 平面 ABC の方程式は

$$3(x-1)+5(y-1)+4z=0.\quad\text{これを整理して,}\quad 3x+5y+4z=8.$$

次に, (1) ② を利用するために, $\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (A の位置ベクトル), $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ (D の位置ベクトル), $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ (平面 ABC の法線ベクトル) とおけば, 点 D と平面 ABC の距離は $\dfrac{|\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0)|}{\|\boldsymbol{a}\|} = \dfrac{20}{\sqrt{50}} = 2\sqrt{2}$.

③ ②と同じ意味で $\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{a}$ を用いる. 直線 ℓ は点 A を通り, $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ を方向ベクトルとするから, その方程式は $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-1}{5} = \dfrac{z}{4}$. また, $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}$ より, (1) ① を用いて, 点 D とこの直線の距離は $\dfrac{\|\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0)\|}{\|\boldsymbol{a}\|} = \dfrac{4\sqrt{50}}{\sqrt{50}} = 4$.

【注】②, ③の距離は D から平面, 直線に下ろした垂線の長さである. ②では D から平面 ABC に垂線 DE を下ろせば, $\mathrm{E}(-1+3t, 3+5t, 4+4t)$ が $3x+5y+4z=8$ 上にあるから $t = -\frac{2}{5}$ となり, $\|\overrightarrow{\mathrm{DE}}\| = 2\sqrt{2}$. ③では D から "A を通る平面 ABC の法線" に垂線 DF を下ろせば, $\mathrm{F}(1+3u, 1+5u, 4u)$ が $\overrightarrow{\mathrm{DF}} \perp \boldsymbol{a}$ を満たすから $u = \frac{2}{5}$ となり, $\|\overrightarrow{\mathrm{DF}}\| = 4$.

(3) 2 平面の法線ベクトルが $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ であるから, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \\ -1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -4 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$ が交線の方向ベクトルとなる. 一方, 交線と xy 平面との交点は $\begin{cases} x+y-3z=1 \\ 2x+y+z=-1 \\ z=0 \end{cases}$ を解いて, $(x,y,z) = (-2,3,0)$. よって, 交線の方程式は $\dfrac{x+2}{-4} = \dfrac{y-3}{7} = z$ $\bigl(\Leftrightarrow\ x=-2-4t,\ y=3+7t,\ z=t\bigr)$. あるいは, 交線上の点は連立 1 次方程式 $\begin{cases} x+y-3z=1 \\ 2x+y+z=-1 \end{cases}$ の解であると考えて, 行基本変形 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 7 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -7 & 3 \end{bmatrix}$ により, 上と同じパラメータ表示を得る. 次に, 2 平面のなす角 θ $(0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2})$ は法線同士のなす角に等しいから, $\cos\theta = \dfrac{|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}|}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|} = \dfrac{0}{\sqrt{11}\sqrt{6}} = 0$. よって, $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

【注】2 直線の方向ベクトルが $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ であるとき, この 2 直線のなす角 θ $(0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2})$ は「$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角」または「$\boldsymbol{a}, -\boldsymbol{b}$ のなす角」のいずれかで与えられる. 従って, $\cos\theta = \dfrac{|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}|}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|}$ が成り立つ.

(4) ① 直線 ℓ 上の点 $(4+5t,\ -1+3t,\ -2-4t)$ を平面 α の方程式 $5x-4y-3z=5$ に代入して, $5(4+5t)-4(-1+3t)-3(-2-4t)=5$ となり, $t=-1$. よって, 交点 $\boldsymbol{x}_0$ の座標は $(-1,-4,2)$.

② α の法線ベクトルが $\boldsymbol{a} := \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}$, ℓ の方向ベクトルが $\boldsymbol{b} := \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ より, $\boldsymbol{b}$ の平面 α への正射影は $\boldsymbol{b} - \dfrac{\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} - \dfrac{25}{50}\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix} = \dfrac{5}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \mathbin{/\!/} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$. よって, 直線 m の方程式は $x+1 = \dfrac{y+4}{2} = \dfrac{z-2}{-1}$.

③ $\boldsymbol{c} := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ が直線 m の方向ベクトルであるから, 直線 ℓ, m のなす角を θ $(0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2})$ とすれば,

$$\cos\theta = \frac{|\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}|}{\|\boldsymbol{b}\|\|\boldsymbol{c}\|} = \frac{|5+6+4|}{\sqrt{50}\sqrt{6}} = \frac{15}{10\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \qquad \therefore\ \theta = \frac{\pi}{6}.$$

④ 求める平面は $\boldsymbol{x}_0$ を通り, $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$ を法線ベクトルとする. よって, 方程式は

$$5(x+1) + (y+4) + 7(z-2) = 0, \quad \text{すなわち} \quad 5x+y+7z=5.$$