2020年度数学演習第二　【解答例】

演習第４回　微積：偏微分［１］（偏微分，合成関数の微分）

2020 年 11 月 4 日　実施

1　小テスト問題の解答

問 $\boxed{1}$

$$
\begin{aligned}
f_x &= \cos\left(xy^2\right)\cdot\frac{\partial xy^2}{\partial x} + \sin\left(x^2y\right)\cdot\frac{\partial x^2y}{\partial x} \\
&= y^2\cos\left(xy^2\right) + 2xy\sin\left(x^2y\right)
\end{aligned}
$$

<u>よって答えは　１</u>.

問 $\boxed{2}$

$$
\begin{aligned}
f_y &= \cos\left(xy^2\right)\cdot\frac{\partial xy^2}{\partial y} + \sin\left(x^2y\right)\cdot\frac{\partial x^2y}{\partial y} \\
&= 2xy\cos\left(xy^2\right) + x^2\sin\left(x^2y\right)
\end{aligned}
$$

<u>よって答えは　３</u>.

問 $\boxed{3}$

$f_x = y^2\cos\left(xy^2\right) + 2xy\sin\left(x^2y\right)$ なので

$$
\begin{aligned}
f_{xx} &= -y^2\sin\left(xy^2\right)\cdot\frac{\partial xy^2}{\partial x} + 2y\sin\left(x^2y\right) + 2xy\cos\left(x^2y\right)\cdot\frac{\partial x^2y}{\partial x} \\
&= -y^4\sin\left(xy^2\right) + 2y\sin\left(x^2y\right) + 4x^2y^2\cos\left(x^2y\right)
\end{aligned}
$$

<u>よって答えは　４</u>.

問 $\boxed{4}$

$f_x = y^2\cos\left(xy^2\right) + 2xy\sin\left(x^2y\right)$ なので

$$
\begin{aligned}
f_{xy} &= 2y\cos\left(xy^2\right) - y^2\sin\left(xy^2\right)\cdot\frac{\partial xy^2}{\partial y} + 2x\sin\left(x^2y\right) + 2xy\cos\left(x^2y\right)\cdot\frac{\partial x^2y}{\partial y} \\
&= 2y\cos\left(xy^2\right) - 2xy^3\sin\left(xy^2\right) + 2x\sin\left(x^2y\right) + 2x^3y\cos\left(x^2y\right)
\end{aligned}
$$

<u>よって答えは　２</u>.

2　レポート課題の解答

問 $\boxed{1}$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} = ye^{xy}\cdot\left(\frac{-2t}{(t^2+1)^2}\right) + xe^{xy}\left(\frac{-4t^3}{(t^4+1)^2}\right)$$

よって求める値は

$$\frac{1}{2}e^{\frac{1}{4}}\cdot\left(-\frac{2}{4}-\frac{4}{4}\right) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{4}}\left(-\frac{1}{2}-1\right) = \underline{-\frac{3}{4}e^{\frac{1}{4}}}$$

問 $\boxed{2}$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{y}{1+xy}\cdot\left(2uv^2\right) + \frac{x}{1+xy}\cdot\left(\frac{-2uv^4}{(u^2v^4+1)^2}\right)$$

ここで $u = v = 1$ であるとき $x = 1,\ y = \frac{1}{2}$ であるので求める値は

$$\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}\cdot 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{-2}{4}\right) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \underline{\frac{1}{3}}$$

問 $\boxed{3}$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} 2u\sin(v^3) & 3u^2v^2\cos(v^3) \\ 3u^2\cos(v^3) & -3u^3v^2\sin(v^3) \end{pmatrix} = \underline{-6u^4v^2\sin^2(v^3) - 9u^4v^2\cos^2(v^3)}$$

問 $\boxed{4}$

$f_x = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{y}{1+x^2}\right)^2}\cdot\dfrac{-2xy}{(1+x^2)^2}$，$f_y = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{y}{1+x^2}\right)^2}\cdot\dfrac{1}{1+x^2}$ より

$f_x(1, 2\sqrt{3}) = -\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，$f_y(1, 2\sqrt{3}) = \dfrac{1}{8}$．よって求める法線の式は $\dfrac{x-1}{-\frac{\sqrt{3}}{4}} = \dfrac{y-2\sqrt{3}}{\frac{1}{8}} = \dfrac{z-\frac{\pi}{3}}{-1}$．

これを整理すると $\underline{\dfrac{4}{\sqrt{3}}(x-1) = -8(y-2\sqrt{3}) = z - \dfrac{\pi}{3}}$．

3　他の問題の解答

$\boxed{\mathbf{1}}$

(1) $f_x(x,y)=e^x\cos^2 y-2e^y\sin x\cos x$, $f_y(x,y)=-e^y\sin^2 x-2e^x\sin y\cos y$, $f_{xx}(x,y)=2e^y(\sin^2 x-\cos^2 x)+e^x\cos^2 y$, $f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)=-2(e^y\sin x\cos x+e^x\sin y\cos y)$, $f_{yy}(x,y)=-e^y\sin^2 x+2e^x(\sin^2 y-\cos^2 y)$.　$\sin 2x,\sin 2y,\cos 2x,\cos 2y$ を用いて表現してもよい.

(2) $f_x(x,y)=\dfrac{2x+y}{2\sqrt{x^2+xy+y^2}}$, $f_y(x,y)=\dfrac{x+2y}{2\sqrt{x^2+xy+y^2}}$, $f_{xx}(x,y)=\dfrac{3y^2}{4(x^2+xy+y^2)^{\frac{3}{2}}}$, $f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)=-\dfrac{3xy}{4(x^2+xy+y^2)^{\frac{3}{2}}}$, $f_{yy}(x,y)=\dfrac{3x^2}{4(x^2+xy+y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

(3) $f(x,y)=\dfrac{\log_e y}{\log_e x}$ より, $f_x(x,y)=-\dfrac{\log y}{x(\log x)^2}$, $f_y(x,y)=\dfrac{1}{y\log x}$, $f_{xx}(x,y)=\dfrac{\log y}{x^2(\log x)^2}+\dfrac{2\log y}{x^2(\log x)^3}=\dfrac{(\log x+2)\log y}{x^2(\log x)^3}$, $f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)=-\dfrac{1}{xy(\log x)^2}$, $f_{yy}(x,y)=-\dfrac{1}{y^2\log x}$.

(4) $|y|<x$ (特に $x>0$) に注意して, $f_x(x,y)=\dfrac{y}{x\sqrt{x^2-y^2}}$, $f_y(x,y)=-\dfrac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$, $f_{xx}(x,y)=\dfrac{y^3-2x^2y}{x^2(x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}$, $f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)=\dfrac{x}{(x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}$, $f_{yy}(x,y)=-\dfrac{y}{(x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

(5) $(x,y)\neq(0,0)$ のとき, $(x^2+y^2)f=x^3y-xy^3$ の両辺を x で偏微分すると, $2xf+(x^2+y^2)f_x=3x^2y-y^3$, $(x^2+y^2)^2f_x=(3x^2y-y^3)(x^2+y^2)-2x^2y(x^2-y^2)$ より, $f_x(x,y)=\dfrac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$ が従う. 同様にして, $f_y(x,y)=\dfrac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$ を得る. $(x,y)=(0,0)$ のとき, $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$ が定義から容易にわかる. 次に, 2 次偏導関数を計算する. $(x,y)\neq(0,0)$ のとき, $(x^2+y^2)^2f_x=y(x^4+4x^2y^2-y^4)$ の両辺を x で偏微分すると, $4x(x^2+y^2)f_x+(x^2+y^2)^2f_{xx}=4xy(x^2+2y^2)$, $(x^2+y^2)^3f_{xx}=4xy\{(x^2+2y^2)(x^2+y^2)-(x^4+4x^2y^2-y^4)\}$ より, $f_{xx}(x,y)=\dfrac{4xy^3(-x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^3}$ を得る. 同様にして, $f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)=\dfrac{x^6+9x^4y^2-9x^2y^4-y^6}{(x^2+y^2)^3}=\dfrac{(x^2-y^2)(x^4+10x^2y^2+y^4)}{(x^2+y^2)^3}$, $f_{yy}(x,y)=\dfrac{4x^3y(-3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^3}$. $(0,0)$ での値を求めるために, 上の計算結果から, $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$, $f_x(x,0)=0$ $(x\neq0)$, $f_x(0,y)=-y$ $(y\neq0)$, $f_y(x,0)=x$ $(x\neq0)$, $f_y(0,y)=0$ $(y\neq0)$ であることに注意する. これらを用いて, $f_{xx}(0,0)=0$, $f_{xy}(0,0)=-1$, $f_{yx}(0,0)=1$, $f_{yy}(0,0)=0$ が導かれる. よって, $f(x,y)$ は ($(0,0)$ を除いた領域で C^2 級であるが) $(0,0)$ の近傍で C^2 級でない. $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$ だが, 極限値 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}f_{xx}(x,y)$, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}f_{xy}(x,y)$, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}f_{yy}(x,y)$ はいずれも存在しない (平面の極座標を使えば示せる). ここでの $f(x,y)$ はイタリアの数学者ペアノ (Giuseppe Peano, 1858–1932) の有名な一例である.

$\boxed{\mathbf{2}}$ $z = f(x, y)$ と $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ の合成関数 $z = f(\varphi(t), \psi(t))$ ($= g(t)$ とおく) の微分に関する連鎖律

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \quad \text{あるいは} \quad g'(t) = f_x(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + f_y(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)$$

を適用する解答例を与える.

(1) $f_x(x, y) = \dfrac{(y/x)_x}{1 + (y/x)^2} = -\dfrac{y}{x^2 + y^2}$, $f_y(x, y) = \dfrac{(y/x)_y}{1 + (y/x)^2} = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$, $\varphi'(t) = 2$, $\psi'(t) = -2t$ より,

$$g'(t) = -\frac{1 - t^2}{(2t)^2 + (1 - t^2)^2} \cdot 2 + \frac{2t}{(2t)^2 + (1 - t^2)^2} \cdot (-2t) = \frac{-(2 - 2t^2) - 4t^2}{t^4 + 2t^2 + 1} = -\frac{2}{t^2 + 1}$$

【補足】 実は, $g(t) = \pm\frac{\pi}{2} - 2\,\mathrm{Tan}^{-1}\, t$ $(t \gtrless 0)$ である. 実際, $\theta = \mathrm{Tan}^{-1}\, t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ とおけば $t = \tan\theta$ であるから, 倍角の公式を用いて $\tan(\frac{\pi}{2} - 2\theta) = \frac{1}{\tan 2\theta} = \frac{1 - t^2}{2t}$. よって, $t > 0$ ($\Leftrightarrow$ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ $\Leftrightarrow$ $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - 2\theta < \frac{\pi}{2}$) のとき, $\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1 - t^2}{2t} = \frac{\pi}{2} - 2\theta$. また, $t < 0$ ($\Leftrightarrow$ $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$ $\Leftrightarrow$ $\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - 2\theta < \frac{3\pi}{2}$) のとき, $\mathrm{Tan}^{-1}\frac{1 - t^2}{2t} = -\frac{\pi}{2} - 2\theta$.

(2) $f_x(x, y) = \dfrac{(1 + x^2 + 3y^2)_x}{1 + x^2 + 3y^2} = \dfrac{2x}{1 + x^2 + 3y^2}$, $f_y(x, y) = \dfrac{(1 + x^2 + 3y^2)_y}{1 + x^2 + 3y^2} = \dfrac{6y}{1 + x^2 + 3y^2}$, $\varphi'(t) = 2t$, $\psi'(t) = 3t^2$ より, $g'(t) = \dfrac{2(t^2 + 1) \cdot 2t + 6(t^3 + 1) \cdot 3t^2}{1 + (t^2 + 1)^2 + 3(t^3 + 1)^2} = \dfrac{18t^5 + 4t^3 + 18t^2 + 4t}{3t^6 + t^4 + 6t^3 + 2t^2 + 5}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ $z = f(x, y)$ と $x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v)$ の合成関数 $z = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$ ($= g(u, v)$ とおく) の微分の連鎖律

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial z}{\partial v} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v} \end{cases} \quad \text{あるいは} \quad \begin{cases} g_u(u, v) = f_x(\varphi(u, v), \psi(u, v))\varphi_u(u, v) + f_y(\varphi(u, v), \psi(u, v))\psi_u(u, v) \\ g_v(u, v) = f_x(\varphi(u, v), \psi(u, v))\varphi_v(u, v) + f_y(\varphi(u, v), \psi(u, v))\psi_v(u, v) \end{cases}$$

を適用する解答例を与える.

(1) $f(x, y) = y^x = e^{x \log y}$ だから, $f_x(x, y) = y^x \log y$, $f_y(x, y) = xy^{x-1}$. さらに $\varphi_u(u, v) = -v/u^2$, $\varphi_v(u, v) = 1/u$, $\psi_u(u, v) = 2u$, $\psi_v(u, v) = 2v$ だから, $g_u(u, v) = (u^2 + v^2)^{v/u}\log(u^2 + v^2) \cdot \left(-\dfrac{v}{u^2}\right) + \dfrac{v}{u}(u^2 + v^2)^{(v/u)-1} \cdot 2u = v(u^2 + v^2)^{(v/u)-1}\left\{-\dfrac{u^2 + v^2}{u^2}\log(u^2 + v^2) + 2\right\}$, $g_v(u, v) = \dfrac{v^2}{u}(u^2 + v^2)^{(v/u)-1}\left\{\dfrac{u^2 + v^2}{v^2}\log(u^2 + v^2) + 2\right\}$.
ただし, $g(u, v) = (u^2 + v^2)^{v/u}$ を u, v でそれぞれ偏微分することもできる.

(2) $f_x(x, y) = \dfrac{4xy^2}{(x^2 + y^2)^2}$, $f_y(x, y) = -\dfrac{4x^2y}{(x^2 + y^2)^2}$, $\varphi_u(u, v) = \cos v$, $\varphi_v(u, v) = -u\sin v$, $\psi_u(u, v) = \sin v$, $\psi_v(u, v) = u\cos v$ より, $g_u(u, v) = \dfrac{4\cos v\sin^2 v}{u}\cos v + \dfrac{-4\cos^2 v\sin v}{u}\sin v = 0$ と, $g_v(u, v) = \dfrac{4\cos v\sin^2 v}{u}(-u\sin v) + \dfrac{-4\cos^2 v\sin v}{u}(u\cos v) = -4\cos v\sin v$ を得る. ただし, g の偏導関数を計算するだけなら $g(u, v) = \cos^2 v - \sin^2 v = \cos 2v$ と変形してから直接偏微分する方が簡単である.

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $\dfrac{\partial x}{\partial u} = 3u^2$, $\dfrac{\partial x}{\partial v} = 6v$, $\dfrac{\partial y}{\partial u} = 6u$, $\dfrac{\partial y}{\partial v} = 3v^2$ より, $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det\begin{pmatrix} 3u^2 & 6v \\ 6u & 3v^2 \end{pmatrix} = 9uv(uv - 4)$.

(2) $\dfrac{\partial x}{\partial r} = \cos^3 t$, $\dfrac{\partial x}{\partial t} = -3r\cos^2 t\sin t$, $\dfrac{\partial y}{\partial r} = \sin^3 t$, $\dfrac{\partial y}{\partial t} = 3r\sin^2 t\cos t$, より, $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,t)} = 3r\sin^2 t\cos^2 t$.

5 $z = f(x,y)$ とする.

(1) $f_x = -\dfrac{2y}{x} + \dfrac{1}{y}$ より, $f_x(1,1) = -1$. $f_y = \dfrac{2}{x} - \dfrac{x}{y^2}$ より, $f_y(1,1) = 1$. よって求める接平面の方程式は
$z-3 = -(x-1)+(y-1)$ を整理して $x-y+z = 3$. また求める法線の方程式は $x-1 = \dfrac{y-1}{-1} = z-3$.

(2) $f_x = \dfrac{4x}{2x^2-y-6}$ より, $f_x(2,1) = 8$. $f_y = \dfrac{-1}{2x^2-y-6}$ より, $f_y(2,1) = -1$. よって求める接平面の方程式は
$z = 8(x-2)-(y-1)$ を整理して $8x-y-z = 15$. また求める法線の方程式は $\dfrac{x-2}{8} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{-1}$.

6 一般に, 3 種類の極限には論理的な関係はないので, (a) の極限または (b) の極限が存在しないことから, (c) の極限が存在しないとは云えないし, (c) の極限が存在しても, (a) の極限や (b) の極限が存在すると結論付けられない.

(1) $\lim\limits_{y\to0}\Big(\lim\limits_{x\to0} f(x,y)\Big) = \lim\limits_{y\to0}(-1) = -1$, $\lim\limits_{x\to0}\Big(\lim\limits_{y\to0} f(x,y)\Big) = \lim\limits_{x\to0} x = 0$. 一方, (x,y) を x 軸に沿って原点に近づけたときの $f(x,y)$ の極限 $\lim\limits_{x\to0} f(x,0) = 0$ と y 軸に沿って原点に近づけたときの極限 $\lim\limits_{y\to0} f(0,y) = -1$ が異なるので (c) の極限は存在しない.

(2) $\lim\limits_{y\to0}\Big(\lim\limits_{x\to0} f(x,y)\Big) = \lim\limits_{y\to0}\dfrac{0}{y^2} = 0$, $\lim\limits_{x\to0}\Big(\lim\limits_{y\to0} f(x,y)\Big) = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{0}{x^2} = 0$. (c) の極限を調べるには本問では平面の極座標 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ $(r > 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$ が有効で, このとき $(x,y) \to (0,0)$ は $r \to 0$ と同じことなので, あたかも（θ をパラメータと見なして）r の 1 変数関数のように扱える. 実際, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とおくと, $f(x,y) = \cos\theta\sin\theta = (1/2)\sin 2\theta$ は区間 $[-1/2, 1/2]$ の任意の値を取り得るから, (c) の極限は存在しない.

(3) $\lim\limits_{y\to0}\Big(\lim\limits_{x\to0} f(x,y)\Big) = \lim\limits_{y\to0}\dfrac{0}{|y|} = 0$, $\lim\limits_{x\to0}\Big(\lim\limits_{y\to0} f(x,y)\Big) = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{0}{|x|} = 0$. (c) の極限については (2) と同様に, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とおいて, $|f(x,y)| = (r/2)|\sin 2\theta| \leqq r/2 \to 0$ $(r \to 0)$. よって, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

(4) $|f(x,y)| \leqq |x| \leqq \sqrt{x^2+y^2}$ から, $\lim\limits_{y\to0}\Big(\lim\limits_{x\to0} f(x,y)\Big) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ がわかる. 一方, $x \neq 0$ として, 例えば $y = 1/n\pi$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ を考えると, $n \to \infty$ のとき, $y = 1/(n\pi) \to +0$ で, $f(x, 1/(n\pi)) = (-1)^n x$ なので, $\lim\limits_{y\to0} f(x,y)$ $(x \neq 0)$ は存在しない. よって, (b) の極限は存在しない.

【補足】 例えば, **1** (5) のような場面で, (a) や (b) の極限は自然に現れる. 実際, **1** (5) では

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{k\to0}\Big(\lim_{h\to0}\frac{f(h,k)}{hk}\Big) = \lim_{k\to0}\Big(\lim_{h\to0}\frac{h^2-k^2}{h^2+k^2}\Big) = -1,$$
$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h\to0}\Big(\lim_{k\to0}\frac{f(h,k)}{hk}\Big) = \lim_{h\to0}\Big(\lim_{k\to0}\frac{h^2-k^2}{h^2+k^2}\Big) = 1.$$

一般に, $g(tx,ty) = g(x,y)$ $(t \neq 0)$, $g(1,0) \neq g(0,1)$ をみたす $(x,y) \neq (0,0)$ での C^2 級関数 $g(x,y)$ を用いて, $f(x,y) = xy\,g(x,y)$ $((x,y) \neq (0,0))$, $= 0$ $((x,y) = (0,0))$ と定めれば, $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$ が成り立つ.