# 2020年度数学演習第二

演習第5回　一次独立・一次従属，基底と次元

2020年11月11日　実施

## 0.　概要

まず一次独立と一次従属について記す.

【一次独立】

$\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^m$ について考える.

$\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k$ が一次独立

$\Leftrightarrow c_1\mathbf{a}_1 + \cdots + c_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ となる $c_1, \cdots, c_k$ は $c_1 = \cdots = c_k = 0$ に限る.

$\Leftrightarrow$ 同次連立一次方程式 $[\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k]\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ が自明な解 $\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ のみもつ

$\Leftrightarrow rank\,[\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k] = k$

【一次従属】

$\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^m$ について考える.

$\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k$ が一次従属

$\Leftrightarrow$ 一次独立でない

$\Leftrightarrow c_1\mathbf{a}_1 + \cdots + c_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ となる $c_1, \cdots, c_k$ は $c_1 = \cdots = c_k = 0$ 以外にも存在する.

$\Leftrightarrow$ 同次連立一次方程式 $[\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k]\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ が自明な解 $\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ 以外にも解を持つ.

$\Leftrightarrow rank\,[\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k] \neq k$

◎一次従属であるとき $\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ が存在して関係式 $c_1\mathbf{a}_1 + \cdots + c_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ が成立するがこれを非自明な一次関係式という．非自明な一次関係式は同次連立一次方程式 $[\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k]\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ より解 $c_1, \cdots, c_k$ を求めれば求められる.

例 **0.1.** $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ について考える.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

よって $rank \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} = 3$ であるので $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ は一次独立.

例 **0.2.** $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ について考える.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

よって $rank \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} = 2$ であるので $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ は一次従属. また $\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ の解は $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ ($c$ は任意定数). よって非自明な一次関係式は $2\mathbf{a}_1 - 3\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$.

次に基底と次元について記す.

【基底と次元】

ベクトル空間 $V$ の元の組 $(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n)$ は次の 2 つの条件を共に満たすとき $V$ の基底という.

1. $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$ は $V$ を生成する. すなわち $V = < \mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n >$
2. $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$ は一次元独立である.

◎基底の取り方は一意的ではないがベクトル空間の基底をなす元の個数はただ一つに決まる. この個数をベクトル空間の次元という.

例 **0.3.** $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, = \begin{matrix} x + 2y + 4z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 5x + 4y + 2z = 0 \end{matrix} \right\}$ を考えると $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

よって $\begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 5x + 4y + 2z = 0 \end{cases}$ の解は $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ ($c$ は任意定数). よって $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ が基底で次元は 1.

## 1.　小テスト問題

問 $\boxed{1}$ ベクトル $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix}$， $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$， $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$， $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -10 \end{bmatrix}$， $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$， $\mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \\ -1 \end{bmatrix}$ を考える．このとき一次独立となるベクトルの組み合わせを次から選択しなさい．

1． $\underline{\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}_1}$　　2． $\underline{\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}_2}$　　3． $\underline{\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}_3}$　　4． $\underline{\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}_4}$

問 $\boxed{2}$ ベクトル $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$， $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$， $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ k \end{bmatrix}$ が一次元従属となる $k$ の値を次から選択せよ．

1． $\underline{-3}$　　2． $\underline{-1}$　　3． $\underline{0}$　　4． $\underline{6}$

問 $\boxed{3}$ ベクトル $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$， $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$， $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$， $\mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ k \end{bmatrix}$ が一次元従属となる $k$ の値を次から選択せよ．

1． $\underline{-6}$　　2． $\underline{-3}$　　3． $\underline{-1}$　　4． $\underline{0}$

問 $\boxed{4}$ $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 3x + 5y - 2z = 0 \right\}$ の基底を次から選択せよ．

1． $\underline{\left( \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \right)}$　　2． $\underline{\left( \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \right)}$　　3． $\underline{\left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)}$　　4． $\underline{\left( \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} \right)}$

## 2.　レポート課題

問 $\boxed{1}$

$$W_1 = \left\langle \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, , \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix} \right\rangle$$

の次元を求めよ．

問 $\boxed{2}$

$$W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{array}{r} x - 3y + 9z = 0 \\ 2x + y + 4z = 0 \\ 5x + 4y + 7z = 0 \end{array} \right\}$$

の次元を求めよ．

問 $\boxed{3}$

$$W_3 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{array}{r} 2x + 4y + 5z = a \\ 4x + 3y + 7z = b \\ 4x + 13y + 13z = c \end{array} \text{ が解を持つ} \right\}$$

の次元を求めよ．

問 $\boxed{4}$

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ 4 \end{bmatrix}$$

の間に成り立つ非自明な一次関係式を求めよ．ただし，整数を係数とする関係式を答えること．

## 3.　他の問題

**1**［数ベクトルの一次独立性の判定と非自明な一次関係式］　次のベクトルが一次独立かどうか判定し，一次従属の場合には，非自明な一次関係式をひとつ求めよ．

(1) $\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix}$　　(2) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$　　(4) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

**2**［一次独立性］ベクトル空間 $V$ に属する 4 つのベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ が一次独立であるとする．

(1) $V$ 中の次のベクトルの組は一次独立かどうか判定せよ．一次従属の場合には，非自明な一次関係式をひとつ求めよ．

(i)　$(\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{v}_1 + 5\boldsymbol{v}_2 - 2\boldsymbol{v}_3,\quad \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{v}_1 + 7\boldsymbol{v}_2 - 3\boldsymbol{v}_3,\quad \boldsymbol{a}_3 = 3\boldsymbol{v}_1 + 7\boldsymbol{v}_2 - 2\boldsymbol{v}_3)$

(ii)　$(\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3 + 3\boldsymbol{v}_4,\quad \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3,\quad \boldsymbol{a}_3 = 2\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_4,\quad \boldsymbol{a}_4 = 3\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_3 + 2\boldsymbol{v}_4)$

(2) $V$ 中の次のベクトルの組が一次従属となるような定数 $k$ を求め，そのときの非自明な一次関係式をひとつ求めよ．

$$(\boldsymbol{a}_1 = 2\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 - 5\boldsymbol{v}_3,\quad \boldsymbol{a}_2 = -4\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 - 3\boldsymbol{v}_3,\quad \boldsymbol{a}_3 = -5\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + k\boldsymbol{v}_3)$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ ［数ベクトル空間の基底と次元］ 次のベクトルの組 $\mathcal{E}_1 \sim \mathcal{E}_5$ のうち，次の条件 (i),(ii),(iii) を満たしているものをそれぞれすべて答えよ．

(i) $\mathbb{R}^3$ を生成する．　(ii) 一次独立なベクトルの組である．　(iii) $\mathbb{R}^3$ の基底である．

$$\mathcal{E}_1 : \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \qquad \mathcal{E}_2 : \left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \qquad \mathcal{E}_3 : \left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$\mathcal{E}_4 : \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}\right) \qquad \mathcal{E}_5 : \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ ［部分空間の基底と次元］ 次の 4 つの $\mathbb{R}^3$ の部分空間の基底と次元を求めよ．

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2x + y - 4z = 0 \right\}, \quad W_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle,$$

$$W_3 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & y & + & 4z & = & 0 \\ -x & - & 3y & + & 3z & = & 0 \end{array} \right\}, \quad W_4 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{array}{l} \text{連立一次方程式} \\ \begin{cases} x + y + z = a \\ 2x + y + 4z = b \\ -x - 3y + 3z = c \end{cases} \\ \hfill \text{が解を持つ．} \end{array} \right\}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ ［部分空間の基底］ $\mathbb{R}^4$ の部分空間 $W$ を次で定義する．

$$W = \left\langle \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle$$

(1) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ の間に成り立つ非自明な一次関係式をひとつ求めよ．

(2) 次のうち，$W$ の基底となっているものをすべて選べ．

$$\mathcal{E} : (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3), \quad \mathcal{F} : (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4), \quad \mathcal{G} : (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4), \quad \mathcal{H} : (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4)$$

(3) $\left(\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ は $W$ の基底であることを示せ．