2020年度数学演習第二　【解答例】

演習第５回　一次独立・一次従属，基底と次元

2020年11月11日　実施

1.　小テスト問題の解答

問 1

$$\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{b} & \mathbf{c}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & 5 \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{a}_2 & \mathbf{b} & \mathbf{c}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 7 & 5 \\ -10 & -2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{a}_3 & \mathbf{b} & \mathbf{c}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 7 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{a}_4 & \mathbf{b} & \mathbf{c}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 12 & 7 & 5 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

よって答えは　3.

問 2

$$\begin{bmatrix}\mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 2 \\ 4 & 5 & k \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -3-k \end{bmatrix}$$

よって答えは　1.

問 3

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & k \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

よって答えは　4.

問 4

$3x + 5y - 2z = 0$ より $z = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}y$ であるので

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{x}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{y}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

よって答えは　2.

2.　レポート課題の解答

問 $\boxed{1}$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 3 & 5 & 7\\ 4 & 6 & 10\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1 & 0 & 4\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

よって $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ は一次従属．また明らかに $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ は一次独立．
<u>よって W_1 は 2 次元.</u>

問 $\boxed{2}$

$$\begin{bmatrix}1 & -3 & 9\\ 2 & 1 & 4\\ 5 & 4 & 7\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

よって同次連立一次方程式 $\begin{cases} x - 3y + 9z = 0 \\ 2x + y + 4z = 0 \\ 5x + 4y + 7z = 0 \end{cases}$ の解は $\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} = c\begin{bmatrix}-3\\ 2\\ 1\end{bmatrix}$ 　　(c は任意定数).
<u>よって W_2 は 1 次元.</u>

問 3

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & a \\ 4 & 3 & 7 & b \\ 4 & 13 & 13 & c \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & a \\ 0 & 5 & 3 & 2a-b \\ 0 & 0 & 0 & b+c-4a \end{bmatrix}$$

よって連立一次方程式 $\begin{cases} 2x+4y+5z=a \\ 4x+3y+7z=b \\ 4x+13y+13z=c \end{cases}$ が解を持つ条件は $c=4a-b$ であるので $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in W_3$ であるためには $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

<u>よって W_3 は 2 次元.</u>

問 4

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & -9 \\ 8 & 4 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

よって $\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ とすると $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ (c は任意定数).

<u>よって求める非自明な一次関係式は $-2\mathbf{a}_1 + 3\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$.</u>

3. 他の問題の解答

$\boxed{1}$ (1) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 7 \\ -2 & -3 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -8 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は一次従属で，非自明な一次関係式のひとつは $-7\boldsymbol{a}_1+4\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$. (2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \\ -1 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 17 & 4 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 42 & 7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{6} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$ より，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ は一次従属で，非自明な一次関係式のひとつは $-\dfrac{7}{6}\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 - \dfrac{1}{6}\boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{0}$. 分母を払って $7\boldsymbol{a}_1 + 6\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 - 6\boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{0}$ でも可.

(3) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -10 & -9 \\ 0 & 0 & -10 & -9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{10} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{10} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ は一次従属で，非自明な一次関係式のひとつは $2\boldsymbol{a}_1 + 3\boldsymbol{a}_2 + 9\boldsymbol{a}_3 - 10\boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{0}$.

(4) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 20 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ より，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ は一次独立.

$\boxed{2}$ (1)(i) $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 = c_1(\boldsymbol{v}_1 + 5\boldsymbol{v}_2 - 2\boldsymbol{v}_3) + c_2(\boldsymbol{v}_1 + 7\boldsymbol{v}_2 - 3\boldsymbol{v}_3) + c_3(3\boldsymbol{v}_1 + 7\boldsymbol{v}_2 - 2\boldsymbol{v}_3) = (c_1 + c_2 + 3c_3)\boldsymbol{v}_1 + (5c_1 + 7c_2 + 7c_3)\boldsymbol{v}_2 + (-2c_1 - 3c_2 - 2c_3)\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$. $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は一次独立だから，$\begin{cases} c_1 + c_2 + 3c_3 = 0 \\ 5c_1 + 7c_2 + 7c_3 = 0 \\ -2c_1 - 3c_2 - 2c_3 = 0 \end{cases}$. これは，$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 7 \\ -2 & -3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$. $\boxed{1}$(1) からこの連立一次方程式の係数行列を簡約化すると，$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} -7 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$. 従って，例えば $k = 1$ とすれば，$-7\boldsymbol{a}_1 + 4\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ という非自明な一次関係式が得られるので，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は一次従属. (ii) (i) と

同様に，$c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2+c_3\boldsymbol{a}_3+c_4\boldsymbol{a}_4=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}0&1&2&3\\1&2&3&0\\2&3&0&1\\3&0&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\\c_4\end{bmatrix}=\boldsymbol{0}$. $\boxed{1}$(4) からこの連立一次方程式の係数行列を簡約化すると単位行列なので，$c_1=c_2=c_3=c_4=0$．よって，$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$ は一次独立.

(2) (1) と同様に，$c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2+c_3\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}2&-4&-5\\1&3&2\\-5&-3&k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{0}$. ここで，

$\begin{bmatrix}2&-4&-5\\1&3&2\\-5&-3&k\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&2\\0&-10&-9\\0&12&k+10\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-\frac{7}{10}\\0&1&\frac{9}{10}\\0&0&k-\frac{8}{10}\end{bmatrix}$ である．よって，$k-\dfrac{4}{5}=0$，つまり $k=\dfrac{4}{5}$ のとき，$\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}\frac{7}{10}\\-\frac{9}{10}\\1\end{bmatrix}$ となるので，例えば $t=1$ とすれば，$\dfrac{7}{10}\boldsymbol{a}_1-\dfrac{9}{10}\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{0}$ という非自明な一次関係式が成り立つ.（分母を払って，$7\boldsymbol{a}_1-9\boldsymbol{a}_2+10\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{0}$ でも可.）従って $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ は一次従属. $k\neq\dfrac{4}{5}$ のとき，$c_1=c_2=c_3=0$ となるので，$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ は一次独立.

$\boxed{3}$ $\left[\begin{array}{cc|c}-1&0&a\\0&-2&b\\2&1&c\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc|c}1&0&-a\\0&-2&b\\0&1&c+2a\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc|c}1&0&-a\\0&1&c+2a\\0&0&4a+b+2c\end{array}\right]$ から，$\mathcal{E}_1$ の 2 つの列ベクトルは一次独立だが，$4a+2b+2c\neq 0$ となる $\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3$ を一次結合で表すことができないので，$\mathbb{R}^3$ を生成しない. $\left[\begin{array}{ccc|c}0&1&1&a\\-1&0&1&b\\1&-1&0&c\end{array}\right]\to\cdots\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&\frac{a-b+c}{2}\\0&1&0&\frac{a-b-c}{2}\\0&0&1&\frac{a+b+c}{2}\end{array}\right]$ より，$\mathcal{E}_2$ の 3 つの列ベクトル $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ は一次独立で，全ての $\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3$ を含むから $\mathbb{R}^3$ の基底.

$\left[\begin{array}{ccc|c}0&1&-1&a\\-1&0&1&b\\1&-1&0&c\end{array}\right]\to\cdots\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&-b\\0&1&-1&a\\0&0&0&a-b+c\end{array}\right]$ より，$\mathcal{E}_3$ の 3 つの列ベクトルは一次従属で，$a-b+c\neq 0$ となる $\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3$ を一次結合で表すことができないので，$\mathbb{R}^3$ を生成しな

い．$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 3 & 3 & 2 & b \\ 5 & 4 & 2 & c \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2a-8b+5c}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-4a+13b-7c}{3} \\ 0 & 0 & 1 & a-2b+c \end{array}\right]$ より $\mathcal{E}_4$ の 3 つの列ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は一次独立で，全ての $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ を含むから $\mathbb{R}^3$ の基底．$\mathcal{E}_5$ も同じようにやってもよいが，$\boxed{1}$(2) で見たように $\mathcal{E}_5$ の 4 つの列ベクトルは一次従属．また $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4$ は一次独立なので，$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & a \\ 1 & 3 & 4 & b \\ -1 & 4 & 3 & c \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{-7a+10b-4c}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -a+b \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7a-6b+c}{7} \end{array}\right]$ となって，全ての $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ を含むから，$\mathcal{E}_5$ の 4 つの列ベクトルは $\mathbb{R}^3$ を生成する．まとめると，(i) $\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_4, \mathcal{E}_5$．(ii) $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_4$．(iii) $\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_4$．

［注意］: $\mathbb{R}^n$ の基底は n 個の一次独立な n 項列ベクトルからなる．$(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ が $\mathbb{R}^n$ の基底になるかどうかは**教科書 命題 7.14** にあるように $[\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n]$ が正則行列であるか（行列式が 0 でないか）調べるのが簡単である．行列式の値を調べると，$\mathcal{E}_2$ は 2，$\mathcal{E}_3$ は 0，$\mathcal{E}_4$ は -3 になるので，$\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_4$ が $\mathbb{R}^3$ の基底となる．

$\boxed{4}$ W_1 の元は，$\begin{bmatrix} x \\ -2x+4z \\ z \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(x, z \in \mathbb{R})$ と表せるので，$W_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$．この 2 つの列ベクトルは一次独立であることがチェックできるので，W_1 の基底を与え，$\dim W_1 = 2$．W_2 は，$\boxed{3}$で求めたように，$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ だから，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ は一次独立で，$\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ という非自明な一次関係式がある．従って，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の一次結合は，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ の一次結合で表せるから，$W_2 = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \rangle$．よって $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ が基底で，$\dim W_2 = 2$．$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より，$\dim W_3 = 1$ で $\left(\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ が基底．第 3 回$\boxed{1}$(10) で見たように，$W_4 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 5a-2b+c=0 \right\}$ である．W_1 と同様に，$\dim W_4 = 2$ で，$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$ が基底の一例．［注意］: 一般に，$m \times n$ 行列 $A = [\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n]$ に対し，$\{\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解を持つ $\} \subset \mathbb{R}^m$ は，第 7 回で見る A の列空間 $C(A) = \langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$ に一致することが示せる．これを使えば，W_3 でみた簡約化の計算から $\dim W_4 = 2$ と基底の一例 $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}\right)$ が得られる．

$\boxed{5}$ (1) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より，$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 + c_4\boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow$ $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ $(k \in \mathbb{R})$．よって $-4\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + 3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$．(2) 上の簡約行列から，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は一次従属なので，$\mathcal{E}$ は基底にならない．$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4$ は一次独立で，$\boldsymbol{a}_3$ は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ の一次結合で表せるので，$W = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4 \rangle$．よって $\mathcal{F}$ は基底．また，簡約行列の 1, 3, 4 列に注目すると階数 3 だから，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ は一次独立で，$\boldsymbol{a}_2$ は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3$ の一次結合で表せるから，$W = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4 \rangle$．よって $\mathcal{G}$ も基底．同様に，$\mathcal{H}$ も基底．

(3) (i) $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ が一次独立であること．$\begin{bmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ よりわかる．(ii) $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3 \in W$ であること．$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4 | \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3] = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 3 & 0 & 4 & 1 & 4 & 7 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 3 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right] \to \cdots \to$ $\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ よりわかる．(2) から $\dim W = 3$ とわかっていたので，教科書**命題 18.8** に注意すれば，$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ が W を生成することも言えて，$(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ は W の基底とわかる．［注意］: W を生成することは，$[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3 | \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4]$ を簡約化して $\boldsymbol{a}_i$ が $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ の一次結合で表せることを直接示してもよい．