

# 数学演習第二 (演習第6回)

微積：偏微分 [2] (多変数のテーラーの定理, 極値)

2020年 11月 18日

- **小テスト** の問題は **1** の4問です。 **レポート課題** は **2** の4問です。
- それ以外の問題は自習問題です (こちら是非解いて下さい)。
- 要点を読んでから取り組むとよいでしょう。

## 【要点】

演習第4回で多変数関数の偏微分について学んだ。今回は多変数関数の微分の応用としてテーラー展開と極値について学習する。

### 2変数関数のテーラーの定理 (微積教科書 p.94)

$f(x, y)$  が開領域  $D$  において  $C^n$  級の関数であり,  $(a, b), (a+h, b+k) \in D$  とする.  $(a, b)$  と  $(a+h, b+k)$  を結ぶ線分が  $D$  に含まれているならば,

$$f(a+h, b+k) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^j f(a, b) + \frac{1}{n!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(a+\theta h, b+\theta k) \cdots (*)$$

となる  $\theta$  ( $0 < \theta < 1$ ) が存在する。

ここに,  ${}_j C_l = \frac{j!}{l!(j-l)!}$  として  $\left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^j f(a, b)$  は

$$\left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^j f(a, b) = \sum_{l=0}^j {}_j C_l h^l k^{j-l} \frac{\partial^j f}{\partial x^l \partial y^{j-l}}(a, b)$$

と書ける。

< 具体例 >

1.  $\left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^3 f(a, b)$  を計算してみる。

$$\begin{aligned} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^3 f(a, b) &= \left( h^3 \frac{\partial^3}{\partial x^3} + 3h^2 k \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + 3hk^2 \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + k^3 \frac{\partial^3}{\partial y^3} \right) f(a, b) \\ &= h^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a, b) + 3h^2 k \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(a, b) + 3hk^2 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(a, b) + k^3 \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(a, b) \end{aligned}$$

2.  $f(x, y) = xe^y$  の原点における3次までのテーラー展開を考えよう。

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1 & \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0 & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1 & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = 0 & \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0, 0) = 0 \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0, 0) = 0 & \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(0, 0) = 1 & \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0, 0) = 0 \end{array}$$

であるから、これを (\*) の  $n=4$  の場合に代入して

$$xe^y = x + xy + \frac{1}{2}xy^2 + R(x, y)$$

を得る。

極値の定義 (微積教科書 p.95)

$z = f(x, y)$  が点  $P(a, b)$  で極大値  $f(a, b)$  をとるとは、点  $P$  における  $f(x, y)$  の値が、 $P$  の近傍の点  $(x, y)$  ( $(x, y) \neq (a, b)$ ) での値より大きいときという。すなわち、 $P$  を中心とする半径  $\varepsilon$  の円を  $D_\varepsilon$  とし、 $\varepsilon$  を小さくとると

$$f(a, b) > f(x, y) \quad ((x, y) \in D_\varepsilon, (x, y) \neq (a, b))$$

が成り立つときにいう。極小値についても同様である。

### 極値をもつ必要条件 (微積教科書 p.95)

$f(x, y)$  が  $(a, b)$  で極値をとるならば、 $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$  である。

### 極値の判定 (微積教科書 p.96)

$f(x, y)$  は  $C^2$  級の関数であり、点  $(a, b)$  において  $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$  とする。判別式を  $D = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) \right)^2$  と定義する。

- (1)  $D > 0$  とする。  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) > 0$  ならば、 $f$  は点  $(a, b)$  で極小値をとる。  
 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) < 0$  ならば、 $f$  は点  $(a, b)$  で極大値をとる。
- (2)  $D < 0$  ならば、 $f$  は点  $(a, b)$  で極値をとらない。

< 具体例 >

1. 関数  $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2 - x^4 - y^4$  が極値をもつための必要条件を求めよ。

[ 解法 ]

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - 2y - 4x^3 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2x + 2y - 4y^3 = 0 \end{cases} \quad \text{なのでこの2つの式の和から } -4(x^3 + y^3) = 0 \Leftrightarrow x = -y$$

である。これを代入して  $x = 0, 1, -1$  を得る。よって求める条件は  $(x, y) = (0, 0), (1, -1), (-1, 1)$  である。

2. 関数  $f(x, y) = 1 - 2x^2 - xy - y^2 + 2x - 3y$  の極大値、極小値を求めよ。

[ 解法 ]

関数  $f(x, y)$  が極値をもつためには

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -4x - y + 2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -x - 2y - 3 = 0 \end{cases}$$

が必要条件である。これを満たす  $(x, y)$  は  $(x, y) = (1, -2)$  である。次に、この点の極大・極小を判定する。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, -2) = -4 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial xy}(1, -2) = -1 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, -2) = -2$$

であるから、判別式の値は

$$D = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, -2) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, -2) - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial xy}(1, -2) \right)^2 = (-4)(-2) - (-1)^2 = 7 > 0$$

でかつ  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, -2) = -4 < 0$  であるから点  $(1, -2)$  で関数  $f$  は極大値  $f(1, -2) = 5$  をとる。

【小テスト，レポート課題】

1 (小テスト)

関数  $f(x, y)$  についてそれぞれの問いに答えよ.

(1)  $f(x, y) = \frac{\log(1+y)}{1+x}$  の原点におけるテーラー展開をした時、 $xy$  の項の係数を次の中から選べ.

選択肢 1. 1    2.  $-\frac{1}{2}$     3.  $-\frac{1}{2}$     4.  $\frac{1}{2}$

(2)  $f(x, y) = e^{ax} \cos y$  の原点におけるテーラー展開をした時、 $y$  の項の係数を次の中から選べ.

選択肢 1. a    2. 1    3.  $-a^2$     4. 0

(3)  $f(x, y) = -x^2 - xy - y^2 - 4x - 2y$  の極大値をとる点  $(x, y)$  として正しいものを選べ.

選択肢 1. (0, 0)    2. (-2, 0)    3. (2, 0)    4. (1, 1)

(4)  $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$  の極小値をとる点  $(x, y)$  として正しいものを選べ.

選択肢 1. (0, -1)    2. (-1, 0)    3. (0, 1)    4. (1, 1)

2 (レポート課題)

(1) と (2) については3次までのマクローリン展開を求め，(3) と (4) については極値を求めよ．但し，(3) については  $x$  軸及び  $y$  軸上では定義されていないとする．

(1)  $f(x, y) = \sin(x + y^2)$

(2)  $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$

(3)  $f(x, y) = xy + \frac{2}{x} + \frac{4}{y}$

(4)  $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + x$

【それ以外の問題】

3 次の関数を3次の項までマクローリン展開せよ。(剰余項は求めなくて良い.)

但し、マクローリン展開とは  $(0, 0)$  におけるテーラー展開の事を言う.

(1)  $f(x, y) = e^{ax} \sin by$  ( $a, b \neq 0$  は定数)      (2)  $f(x, y) = a^{x+2y}$  ( $a > 0, a \neq 1$ )

(3)  $f(x, y) = \log(1 - x + 2y)$

4 次の関数  $f(x, y)$  が  $(0, 0)$  において極値をとるかどうかを判定せよ.

(1)  $f(x, y) = \cos x + \cos y + 2xy$

(2)  $f(x, y) = x^2 + y^4$

(3)  $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$

(4)  $f(x, y) = x^2 - 2xy^2 + y^4$

(5)  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$

(6)  $f(x, y) = e^{1+x^2+y^2}$

5 次の関数  $f(x, y)$  に対して  $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$  となる  $(x, y)$  を全て求めよ.

さらに  $f(x, y)$  の極値を求めよ.

(1)  $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - x - 4y$

(2)  $f(x, y) = x^4 - 2x^3 + x^2 + y^2$

(3)  $f(x, y) = xy(x + y - 1)$

(4)  $f(x, y) = x^3 + 2x^2 + xy + y^2$

(5)  $f(x, y) = \sin x \sin y$  ( $x, y \in (0, \pi)$ )

(6)  $f(x, y) = y \tan^{-1} x$