数学演習第二 (第６回) 微積：偏微分 [2] (テーラーの定理, 極値) [解答例]

2020 年 11 月 18 日 実施

小テストの解答

$\boxed{1}$

(1) $f(x,y)=\frac{\log(1+y)}{1+x}$ について $f_{xy}=-\frac{1}{(1+x)^2(1+y)}$ から $f_{xy}(0,0)=-1$ なので，2 変数関数のテーラー展開の公式から求める係数は $\frac{1}{2}\cdot 2\cdot(-1)=-1$. よって答えは 3.　　$\underline{-1}$ である.

(2) $f(x,y)=e^{ax}\cos y$ について $f_y=-e^{ax}\sin y$ から $f_y(0,0)=0$ なので，2 変数関数のテーラー展開の公式から求める係数は 0. よって答えは 4.　　$\underline{0}$ である.

(3) $f(x,y)=-x^2-xy-y^2-4x-2y$. $\begin{cases} f_x=-2x-y-4=0 \\ f_y=-x-2y-2=0 \end{cases}$ を解いて, $(x,y)=(-2,0)$ が極値をとる候補. $f_{xx}=-2, f_{xy}=-1, f_{yy}=-2$ より, $D(-2,0)=3>0$ で $f_{xx}=-2<0$ から $(x,y)=(-2,0)$ で極大値をとる. よって答えは 2.　　$\underline{(-2,0)}$.

(4) $f(x,y)=x^3-3xy+y^3$. $\begin{cases} f_x=3x^2-3y=0 \\ f_y=-3x+3y^2=0 \end{cases}$ を解いて, $(x,y)=(0,0),(1,1)$ が極値を与える候補. $f_{xx}=6x, f_{xy}=-3, f_{yy}=6y$ から $D(1,1)=27>0$ で $f_{xx}(1,1)=6>0$ から $(1,1)$ で極小値をとる. 一方, $D(0,0)=-9<0$ より極値を取らない. よって答えは 4.　　$\underline{(1,1)}$.

レポートの解答

$\boxed{2}$

(1) $f(x,y)=\sin(x+y^2)$. f の 3 次までの偏導関数は次の通り:

$$f_x=\cos(x+y^2), f_y=2y\cos(x+y^2), f_{xx}=-\sin(x+y^2), f_{xy}=-2y\sin(x+y^2),$$
$$f_{yy}=2\cos(x+y^2)-4y^2\sin(x+y^2), f_{xxx}=-\cos(x+y^2), f_{xxy}=-2y\cos(x+y^2)$$
$$f_{xyy}=-2\sin(x+y^2)-4y^2\cos(x+y^2), f_{yyy}=-12y\sin(x+y^2)-8y^3\cos(x+y^2)$$

よって, テーラー展開の式に代入して, 答えは $\underline{f(x,y)=x+y^2-\frac{1}{6}x^3+\cdots}$.

(2) $f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$. $f(t)=\frac{1}{\sqrt{1+t}}$ の 1 次までのマクローリン展開は $f(t)=1-\dfrac{1}{2}t+\cdots$ であるから $t=x^2+y^2$ を代入して, 求める答えは

$$\underline{f(x,y)=1-\frac{1}{2}(x^2+y^2)+\cdots}$$

(3) $f(x,y)=xy+\frac{2}{x}+\frac{4}{y}$.

$\begin{cases} f_x=y-\frac{2}{x^2}=0 \\ f_y=x-\frac{4}{y^2}=0 \end{cases}$ を解いて, $(x,y)=(1,2)$ が極値を与える候補である.

$f_{xx}=\dfrac{4}{x^3}, f_{xy}=1, f_{yy}=\dfrac{8}{y^3}$ であるから $D(1,2)=3>0$ で $f_{xx}(1,2)=4>0$

以上より, 求める答えは $\underline{(x,y)=(1,2)\text{ で }f(x,y)\text{ は極小値 }f(1,2)=6\text{ をとる}}$.

(4) $f(x,y)=x^2+xy+y^2+x$.

$\begin{cases} f_x=2x+y+1=0 \\ f_y=x+2y=0 \end{cases}$ を解いて, $(x,y)=\left(-\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\right)$ が極値を与える候補である.

$f_{xx}=2, f_{xy}=1, f_{yy}=2$ であるから $D\left(-\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\right)=3>0$ で $f_{xx}\left(-\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\right)=2>0$

以上より, 求める答えは $\underline{(x,y)=\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)\text{ で }f(x,y)\text{ は極小値 }f\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3}\text{ をとる}}$.

$\boxed{3}$ 次の２変数関数のマクローリン展開の公式を利用する．

$$\begin{aligned}f(x,y)=&f(0,0)+\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)x^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)xy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)y^2\right\}\\&+\frac{1}{3!}\left\{\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0)x^3+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(0,0)x^2y+3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(0,0)xy^2+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0,0)y^3\right\}+\cdots \quad (*)\end{aligned}$$

以下, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 等を f_x 等と書く．

(1) $f(x,y)=e^{ax}\sin by$ より,

$$f_x=ae^{ax}\sin by,\ f_y=be^{ax}\cos by,\ f_{xx}=a^2e^{ax}\cos by,\ f_{xy}=abe^{ax}\cos by,\ f_{yy}=-b^2e^{adx}\sin by,$$
$$f_{xxx}=a^3e^{ax}\sin by,\ f_{xxy}=a^2be^{ax}\cos by,\ f_{xyy}=-ab^2e^{ax\sin by}, f_{yyy}=-b^3e^{ax}\cos by$$

点 $(0,0)$ での値を $(*)$ に代入して

$$e^{ax}\sin by=by+\frac{1}{2}(2abxy)+\frac{1}{3!}\left(3a^2bx^2y-b^3y^3\right)+\cdots=by+abxy+\frac{1}{2}a^2bx^2y-\frac{1}{6}b^3y^3+\cdots$$

$<$ 別解 $>$ $(*)$ を利用しても良いが１変数関数に対するマクローリン展開の公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2+\frac{1}{3!}f'''(0)x^3+\cdots$$

を利用する．２つの１変数関数 e^{ax} と $\sin by$ を３次の項まで展開して

$$e^{ax}=1+ax+\frac{1}{2}a^2x^2+\frac{1}{3!}a^3x^3+\cdots,\sin by=by-\frac{1}{3!}b^3y^3+\cdots$$

２変数多項式として４次以上の項を無視して展開し, 上べきの順に並べると

$$e^{ax}\sin by=\left(1+ax+\frac{1}{2}a^2x^2+\frac{1}{3!}a^3x^3+\cdots\right)\left(by-\frac{1}{3!}b^3y^3+\cdots\right)=by+abxy+\frac{1}{2}a^2bx^2y-\frac{1}{6}b^3y^3+\cdots$$

(2) $(*)$ の式を利用しても良いが, $f(x,y)=a^{x+2y}=e^{(x+2y)\log a}$ であるから, 指数関数のマクローリン展開の式

$$e^t=1+t+\frac{1}{2!}t^2+\frac{1}{3!}t^3+\cdots$$

を用いる方が易しい．$t=(\log a)(x+2y)$ を代入すると

$$a^{x+2y}=1+(\log a)(x+2y)+\frac{(\log a)^2}{2}(x^2+4xy+4y^2)+\frac{(\log a)^3}{6}(x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3)+\cdots$$

を得る．因みに f の三次までの偏導関数は次の通りである:

$$f_x=(\log a)a^{x+2y},\ f_y=2(\log a)a^{x+2y},\ f_{xx}=(\log a)^2a^{x+2y},\ f_{xy}=2(\log a)^2a^{x+2y},\ f_{yy}=4(\log a)^2a^{x+2y},$$
$$f_{xxx}=(\log a)^3a^{x+2y},\ f_{xxy}=2(\log a)^3a^{x+2y},\ f_{xyy}=4(\log a)^3a^{x+2y},\ f_{yyy}=8(\log a)^3a^{x+2y}$$

(3) $(*)$ の式を利用しても良いが, $\log(1+t)$ の３次のマクローリン展開 $\log(1+t)=t-\dfrac{1}{2}t^2+\dfrac{1}{3}t^3+\cdots$ に $t=-x+2y$ を代入して,

$$\begin{aligned}\log(1-x+2y)&=(-x+2y)-\frac{1}{2}(-x+2y)^2+\frac{1}{3!}(-x+2y)^3+\cdots\\&=-x+2y-\frac{1}{2}x^2+2xy-2y^2-\frac{1}{3}x^3+2x^2y-4xy^2+\frac{8}{3}y^3+\cdots\end{aligned}$$

を得る．

$\boxed{4}$

(1) $f(x,y)=\cos x+\cos y+2xy. f_x=-\sin x+2y, f_y=x-2y$ より, $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$. $f_{xx}=-\cos x, f_{xy}=2, f_{yy}=-\cos y$ より, $D(0,0)=-3<0$. よって $f(x,y)$ は $(0,0)$ で極値を取らない.
(2) $f(x,y)=x^2+y^4.(x,y)\neq(0,0)$ で $f(x,y)>0=f(0,0)$ となるので, $f(x,y)$ は $(0,0)$ で極小値をとる.
(3) $f(x,y)=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2. x\neq 0$ の時, $f(x,x)=2x^4>0=f(0,0)$ であるが十分小さい y に対して $f(0,y)=y^2(y^2-2)<0$ なので, $f(x,y)$ は $(0,0)$ で極値を取らない.
(4) $f(x,y)=x^2-2xy^2+y^4=\left(x-y^2\right)^2.(x,y)\neq(0,0)$ が $x=y^2$ を満たす時 $f(x,y)=0=f(0,0)$ となるので, $f(x,y)$ は $(0,0)$ で極値を取らない.
(5) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2+1}.\begin{cases} f_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+1}}=0 \\ f_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+1}}=0 \end{cases}$ を解いて, $(x,y)=(0,0)$ が極値を与える候補. $f_{xx}=\frac{y^2+1}{(x^2+y^2+1)^{\frac{3}{2}}}, f_{xy}=-\frac{xy}{(x^2+y^2+1)^{\frac{3}{2}}}, f_{yy}=\frac{x^2+1}{(x^2+y^2+1)^{\frac{3}{2}}}$ より, $D(0,0)=1>0$. よって $f(x,y)$ は $(0,0)$ で極小値 $f(0,0)=1$ を取る.
(6) $f(x,y)=e^{1+x^2+y^2}.\begin{cases} f_x=2xe^{1+x^2+y^2}=0 \\ f_y=2ye^{1+x^2+y^2}=0 \end{cases}$ を解いて, $(x,y)=(0,0)$ が極値を与える候補. $f_{xx}=\left(4x^2+2\right)e^{1+x^2+y^2}, f_{xy}=4xye^{1+x^2+y^2}, f_{yy}=\left(4y^2+2\right)e^{1+x^2+y^2}$ より, $D(0,0)=4e^2>0$. よって $f(x,y)$ は $(0,0)$ で極小値 $f(0,0)=e$ を取る.

$\boxed{5}$

(1) $f(x,y)=x^2-xy+y^2-x-4y.\begin{cases} f_x=2x-y-1=0 \\ f_y=-x+2y-4=0 \end{cases}$ を解いて, $(x,y)=(2,3)$(この点が極値を与える候補). $f_{xx}=2, f_{xy}=-1, f_{yy}=2$ より $D(2,3)=3>0$ よって, $f(x,y)$ は $(2,3)$ で極小値 $f(2,3)=-7$ をとる.
(2) $f(x,y)=x^4-2x^3+x^2+y^2.\begin{cases} f_x=4x^3-6x^2+2x=2x(x-1)(2x-1)=0 \\ f_y=2y=0 \end{cases}$ より, $(x,y)=(0,0),(1,0),(1/2,0)$(この 3 点が極値を与える候補).$f_{xx}=12x^2-12x+2, f_{xy}=0, f_{yy}=2$ より, $D(x,y)=f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)-f_{xy}(x,y)^2=4(6x^2-6x+1).D(0,0)=D(1,0)=4>0, f_{xx}(0,0)=f_{xx}(1,0)=2>0$ より, $f(x,y)$ は $(0,0),(1,0)$ で極小値 $f(0,0)=f(1,0)=0$ をとる. 一方, $D(1/2,0)=-2<0$ より $f(x,y)$ は $(1/2,0)$ では極値を取らない.
(3) $f(x,y)=xy(x+y-1).\begin{cases} f_x=y(2x+y-1)=0 \\ f_y=x(x+2y-1)=0 \end{cases}$ より, $(x,y)=(0,0),(1,0),(0,1),(1/3,1/3)$(この 4 点が極値を与える候補).$f_{xx}=2y, f_{xy}=2x+2y-1, f_{yy}=2x$ より, $D(x,y)=f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)-f_{xy}(x,y)^2=4xy-(2x+2y-1)^2.D(0,0)=D(1,0)=D(0,1)=-1<0$ より, $f(x,y)$ は $(0,0),(1,0),(0,1)$ で極値をとらない. 一方, $D(1/3,1/3)=1/3>0, f_{xx}(1/3,1/3)=2/3>0$ より, $f(x,y)$ は $(1/3,1/3)$ で極小値 $f(1/3,1/3)=16/27$ をとる.
(4) $f(x,y)=x^3+2x^2+xy+y^2.\begin{cases} f_x=3x^2+4x+y=0 \\ f_y=x+2y=0 \end{cases}$ を解いて, $(x,y)=(0,0),(-7/6,7/12)$(この 2 点が極値を与える候補). $f_{xx}=6x+4, f_{xy}=1, f_{yy}=2$ より, $D(x,y)=f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)-f_{xy}(x,y)^2=12x+7.D(0,0)=7>0, f_{xx}(0,0)=4>0$ より, $f(x,y)$ は $(0,0)$ で極小値 $f(0,0)=0$ をとる. 一方, $D(-7/6,7/12)=-7<0$, より $f(x,y)$ は $(-7/6,7/12)$ で極値を取らない.
(5) $f(x,y)=\sin x\sin y.\begin{cases} f_x=\cos x\sin y=0 \\ f_y=\sin x\cos y=0 \end{cases}$ を解いて, $(x,y)=(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$(この点が極値を与える候補). $f_{xx}=-\sin x\sin y, f_{xy}=\cos x\cos y, f_{yy}=-\sin x\sin y$ より, $D(x,y)=f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)-f_{xy}(x,y)^2=\sin^2 x\sin^2 y-\cos^2 x\cos^2 y.D(\pi/2,\pi/2)=1>0, f_{xx}(\pi/2,\pi/2)=-1<0$ より, $f(x,y)$ は $(\pi/2,\pi/2)$ で極大値 $f(\pi/2,\pi/2)=1$ をとる.
(6) $f(x,y)=y\mathrm{Tan}^{-1}x.\begin{cases} f_x=\frac{y}{x^2+1}=0 \\ f_y=\mathrm{Tan}^{-1}x=0 \end{cases}$ を解いて, $(x,y)=(0,0)$(この点が極値を与える候補). $f_{xx}=-\frac{2xy}{(x^2+1)^2}, f_{xy}=\frac{1}{x^2+1}, f_{yy}=0$ より, $D(x,y)=f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)-f_{xy}(x,y)^2=-\frac{1}{(x^2+1)^2}.D(0,0)=-1<0$ より, $f(x,y)$ は極値をとらない.