

数学演習第二 (演習第7回)

線形：座標，行列の零空間・行空間・列空間

2020年11月25日

- **小テスト** の問題は **1** の4問です。 **レポート課題** は **2** の4問です。
- それ以外の問題は自習用問題です (こちら是非解いて下さい)。
- 要点もよく読むこと。レポート課題の答案には答えだけでなく途中の計算も書いて下さい。

【要点】

基底によるベクトルの座標 (線形教科書 p. 119-120)

$B = (b_1, \dots, b_r)$ がベクトル空間 V の1つの基底であれば，任意の $v \in V$ は b_1, \dots, b_r の1次結合で一通りに表される。

そこで， $v = c_1 b_1 + \dots + c_r b_r = [b_1, \dots, b_r] \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \end{bmatrix}$ と書くとき， v と B から一通りに定まる列ベクトル

$\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \end{bmatrix}$ を v の基底 B に関する座標といい， $[v]_B$ で表す。 V が数ベクトル空間 (の部分空間) の場合，座標

$[v]_B$ を求めるには，非同次連立1次方程式 $[b_1, \dots, b_r] \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \end{bmatrix} = v$ を解けばよい。つまり，実際の計算では，

この拡大係数行列 $[b_1 \ \dots \ b_r \ v]$ を簡約化する。

例えば， \mathbb{R}^2 の基底 $B = (b_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix})$ に対して， $v = \begin{bmatrix} 4 \\ -9 \end{bmatrix}$ の基底 B に関する座標 $[v]_B$ は $v = 3b_1 - 2b_2$ より $[v]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ となる。

行列の零空間・行空間・列空間 (線形教科書 p. 107,130,132)

$m \times n$ 行列 $A = \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_m \end{bmatrix} = [c_1 \ \dots \ c_n]$ に対して，

零空間 $N(A)$ 同次連立方程式 $Ax = 0$ の解全体が作る \mathbb{R}^n の部分空間。

行空間 $R(A)$ n 次行ベクトル r_1, \dots, r_m で生成される \mathbb{R}_n の部分空間。

(ただし， \mathbb{R}_n は， n 次行ベクトル全体が作るベクトル空間を表す。)

列空間 $C(A)$ m 次列ベクトル c_1, \dots, c_n で生成される \mathbb{R}^m の部分空間。

共通部分と和空間に関する次元公式 (線形教科書 p. 134)

W_1, W_2 を V の部分空間とするととき，次の等式が成り立つ。

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

【小テスト：オンライン受験】

1 (1) 次の4つのベクトルの組のうち、1次従属であるものをすべて選べ。

(ア)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(イ)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(ウ)

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(エ)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

(2) (1) の (ア) ~ (エ) のうち、 \mathbb{R}^3 の基底であるものをすべて選べ。

(3) 3×4 行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

の零空間 $N(A)$ の次元を次の中から選べ。

(ア) 1 (イ) 2 (ウ) 3 (エ) 4

(4) (3) の A の列空間 $C(A)$ の次元を次の中から選べ。

(ア) 1 (イ) 2 (ウ) 3 (エ) 4

【レポート課題：オンライン提出】

- 2 (1) \mathbb{R}^2 の基底 $\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} \right)$ に関するベクトル $\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$ の座標を求めよ．

\mathbb{R}^3 の 2 つの部分空間

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 0 \right\},$$

$$W_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

について，以下の問いにそれぞれ答えよ．

- (2) W_1 の次元と基底の 1 組を求めよ．
- (3) $W_1 \cap W_2$ の次元と基底の 1 組を求めよ．
- (4) $W_1 + W_2$ の次元と基底の 1 組を求めよ．

【それ以外の自習用問題】

3 \mathbb{R}^3 の標準基底 $\mathcal{E} = \left(e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ と、さらに次の2つの基底を考える。

$$\mathcal{A} = \left(a_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right), \quad \mathcal{B} = \left(b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, b_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$$

(1) $[b_1]_{\mathcal{E}}, [b_1]_{\mathcal{A}}, [b_1]_{\mathcal{B}}$ をそれぞれ求めよ。

(2) $v \in \mathbb{R}^3$ の基底 \mathcal{A} に関する座標 $[v]_{\mathcal{A}}$ が $\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$ のとき、 v の基底 \mathcal{E} に関する座標 $[v]_{\mathcal{E}}$ および基底 \mathcal{B} に関する座標 $[v]_{\mathcal{B}}$ をそれぞれ求めよ。

4 \mathbb{R}^3 の部分空間 $V = \left\langle a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ を考えると、 $\mathcal{A} = (a_1, a_2)$ は V の基底であ

る。 $b_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ -8 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} -7 \\ 7 \\ 13 \end{bmatrix}$ はどれも V に含まれることを示し、基底 \mathcal{A} に関する座標 $[b_1]_{\mathcal{A}}, [b_2]_{\mathcal{A}}$ をそれぞれ求めよ。

5 \mathbb{R}^4 の部分空間 W_1, W_2, W_3, W_4 を以下の通りに定める。

$$W_1 = \left\langle a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle, \quad W_2 = \left\langle b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, b_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix} \right\rangle,$$

$$W_3 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right\},$$

$$W_4 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 0 \right\}$$

(1) W_2, W_3 の次元と基底をそれぞれ求めよ。

(2) $W_1 \cap W_2, W_1 + W_2$ の次元と基底をそれぞれ求めよ。

(3) $W_1 \cap W_3, W_1 + W_3$ の次元と基底をそれぞれ求めよ。

(4) $W_3 \cap W_4, W_3 + W_4$ の次元と基底をそれぞれ求めよ。

6 行列 $M = \begin{bmatrix} 3 & -5 & -1 & -3 & -9 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ とする。

M および tM の零空間、行空間、列空間の次元と基底をそれぞれ求めよ。