数学演習第二（演習第７回）【解答例】

線形： 座標，行列の零空間・行空間・列空間　　2020 年 11 月 25 日

【小テストの解答例】

$\boxed{1}$ (1) 列ベクトルを結合させた行列を簡約化すればよい．或いは行列式の値を計算してもよい．

（ア） $\begin{bmatrix}1&3&5\\6&2&-2\\3&1&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&5\\0&-16&-32\\0&-8&-16\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&5\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix}$

（イ） $\begin{bmatrix}1&0&1\\2&1&4\\3&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&1&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&-4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

（ウ） $\begin{bmatrix}0&1&1\\3&2&1\\1&0&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&2&-5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&-7\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

（エ） $\begin{bmatrix}1&4&7\\2&-1&5\\-2&3&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&4&7\\0&-9&-9\\0&11&11\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&4&7\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$ 答は **（ア），（エ）**.

(2) (1) の計算と線形代数学の教科書の命題 17.4（というよりも定理 9.1）から，
特に 3 つの 3 次列ベクトルが 1 次独立ならば，それらは $\mathbb{R}^3$ の基底をなす．答は **（イ），（ウ）**.

(3) $A\to\begin{bmatrix}1&2&-4&4\\0&-7&10&-11\\0&-13&17&-22\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&-4&4\\0&-7&10&-11\\0&1&-3&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&2&4\\0&1&-3&0\\0&0&-11&-11\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&3\\0&0&1&1\end{bmatrix}$

より，$N(A)=\left\langle\begin{bmatrix}-2\\-3\\-1\\1\end{bmatrix}\right\rangle$ で，$\dim N(A)=1$ 答は **（ア）**.

(4) (3) の計算と線形代数学の教科書の命題 19.9 から，$\dim C(A)=\operatorname{rank}A=3$ 答は **（ウ）**.
或いは例 19.8 のように直接 ${}^tA$ を行基本変形して簡約化してもよい．実は $C(A)=\mathbb{R}^3$.

【レポート課題の解答例】

2 (1) $\begin{bmatrix} 3 & 5 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ より，求める座標は $\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$.

(2) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in W_1$ は $x = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$ をみたすから，$W_1 = \left\langle \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle$ と表される．また，$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ は１次独立なので，$\dim W_1 = 2$ で，求める W_1 の１組の基底は $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$.

(3) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in W_2$ は $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ より，$W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 6x + y - 4z = 0 \right\}$ と表されるので，$W_1 \cap W_2$ は同次連立１次方程式 $2x + y - z = 0,\ 6x + y - 4z = 0$ の解空間と一致する．そこで，

$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 6 & 1 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3/4 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}$ から，$W_1 \cap W_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 3/4 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\rangle$ と表されるので，$\dim(W_1 \cap W_2) = 1$ で，求める $W_1 \cap W_2$ の１組の基底は $\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \right)$.

【別解】 $W_2 \ni c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2 \\ 4c_1 - 6c_2 \\ c_1 \end{bmatrix}$ が W_1 の元であれば

$$0 = 2c_2 + (4c_1 - 6c_2) - c_1 = 3c_1 - 4c_2$$

より，$3c_1 = 4c_2$ をみたす．よって

$$W_1 \cap W_2 = \left\langle 4 \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\rangle$$

を得るので，$\dim(W_1 \cap W_2) = 1$ で，求める $W_1 \cap W_2$ の１組の基底は $\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \right)$.

(4) (2) の結果より，$W_1 + W_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$ なので，

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -4/3 \end{bmatrix}$$

から，$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ は１次独立で，$\dim(W_1 + W_2) = 3$ がわかり，求める $W_1 + W_2$ の１組の基底は $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ である．基底の例は $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}$ のうち，他の３つのベクトルの組でもよい．何故なら，これら４つのベクトルは１次従属で，任意の３つのベクトルは同一平面上にないからである．更に $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$ なので，基底の例は $\mathbb{R}^3$ の**標準基底**でもよい．なお，次元は命題 19.10 の公式でも計算できる．実際，(2) と (3) から，$\dim W_1 = \dim W_2 = 2,\ \dim(W_1 \cap W_2) = 1$ なので

$$\dim(W_1 + W_2) = 2 + 2 - 1 = 3$$

を得る．また，例題 17.14 の解答も参考にするとよい．

【それ以外の自習用問題の解答例】

$\boxed{3}$ (1) $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 + 5\boldsymbol{e}_3$ だから，$[\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$．$[\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$．$[\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{A}}$ を求めるために，$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}_1$ を解く．$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 | \boldsymbol{b}_1] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 5 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 8 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 9 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{2} \end{array}\right]$ より，$\boldsymbol{b}_1 = \dfrac{1}{2}(3\boldsymbol{a}_1 - 7\boldsymbol{a}_2 + 9\boldsymbol{a}_3)$．よって，$[\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{A}} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ 9 \end{bmatrix}$．$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ を掛けてもよい．

(2) 条件から，$\boldsymbol{v} = p\boldsymbol{a}_1 + q\boldsymbol{a}_2 + r\boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} q+r \\ -p+r \\ p-q \end{bmatrix}$．$[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}}$ を求めるために，$[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q+r \\ -p+r \\ p-q \end{bmatrix}$ を解く．$[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3 | \boldsymbol{v}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & q+r \\ 3 & 3 & 2 & -p+r \\ 5 & 4 & 2 & p-q \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & q+r \\ 0 & -3 & -7 & -p-3q-2r \\ 0 & -6 & -13 & p-6q-5r \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & q+r \\ 0 & 3 & 7 & p+3q+2r \\ 0 & 0 & 1 & 3p-r \end{array}\right] \to$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -9p+q+4r \\ 0 & 3 & 0 & -20p+3q+9r \\ 0 & 0 & 1 & 3p-r \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{13}{3}p-q-2r \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{20}{3}p+q+3r \\ 0 & 0 & 1 & 3p-r \end{array}\right]$．よって, $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \frac{13}{3}p-q-2r \\ -\frac{20}{3}p+q+3r \\ 3p-r \end{bmatrix}$．$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -8 & 5 \\ -4 & 13 & -7 \\ 3 & -6 & 3 \end{bmatrix}$ を掛けてもよい．

$\boxed{4}$ $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}_i$ $(i = 1, 2)$ を解く．$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 | \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2] = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 4 & -7 \\ 1 & 4 & -5 & 7 \\ -2 & 1 & -8 & 13 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & -5 & 7 \\ 0 & -7 & 14 & -21 \\ 0 & 9 & -18 & 27 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$．ここから，$\boldsymbol{b}_1 = 3\boldsymbol{a}_1 - 2\boldsymbol{a}_2$ と $\boldsymbol{b}_2 = -5\boldsymbol{a}_1 + 3\boldsymbol{a}_2$ がわかる．従って，$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ の一次結合で表せるので W に属する．さらに，$[\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$．$[\boldsymbol{b}_2]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}$．

$\boxed{5}$ (1) $[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & -3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より，$\dim W_2 = 2$ で，基底の一例は $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$．

$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & -3 \\ -1 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ より，$\dim W_3 = 2$ で，基底の一例は $\left(\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$．

(2) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ は一次独立だから，$\dim W_1 = 2$．さらに，

$$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -5 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -7 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

より，$\dim(W_1 + W_2) = \mathrm{rank}[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2] = 3$ であり，基底の一例は，$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1)$．共通部分と和の次元公式から，$\dim(W_1 \cap W_2) = 2 + 2 - 3 = 1$．上の簡約行列から，$-3\boldsymbol{a}_1 - 2\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{0}$ という非自明な一次関係式が読み取れる．これは, $3\boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2 = -\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$ を意味する．左辺は W_1 に, 中辺は W_2 に属するから, この元は共通部分 $W_1 \cap W_2$ に属す．$\dim(W_1 \cap W_2) = 1$ だから, $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}\right)$ が $W_1 \cap W_2$ の基底．［注意］: $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} c_1 - c_2 \\ c_2 \\ c_1 - c_2 \\ 2c_1 \end{bmatrix} \in W_2 = \langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 \rangle$ となる c_1, c_2 の条件を求める方法でもできる．

(3) $\dim W_1 = \dim W_3 = 2$.

$$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & 6 & -5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

より，$\dim(W_1 + W_3) = \mathrm{rank}[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2] = 3$ であり，基底の一例は，$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{x}_1)$.．共通部分と和の次元公式から，$\dim(W_1 \cap W_3) = 2 + 2 - 3 = 1$．上の簡約行列から，$-2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + 3\boldsymbol{x}_1 + 4\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0}$ という非自明な一次関係式が読み取れる．これは，$2\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 = 3\boldsymbol{x}_1 + 4\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ を意味する．左辺は W_1 に，中辺は W_3 に属するから，この元は共通部分 $W_1 \cap W_3$ に属す．$\dim(W_1 \cap W_3) = 1$ だから，$\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right)$ が $W_1 \cap W_3$ の基底．［注意］：$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} c_1 - c_2 \\ c_2 \\ c_1 - c_2 \\ 2c_1 \end{bmatrix}$ を W_3 の条件にある連立一次方程式に代入して，c_1, c_2 の満たす条件を求める方法でもできる．

(4) $\dim W_3 = 2, \dim W_4 = 3$. さらに，$W_3 \cap W_4 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right\}$ だから，$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & -3 \\ -1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$ より，$\dim(W_1 \cap W_2) = 1$ で，基底の一例は $\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right)$．$\dim W_3 = 2, \dim W_4 = 3$ より，共通部分と和に関する次元公式から，$\dim(W_3 + W_4) = 2 + 3 - 1 = 4$．$\dim \mathbb{R}^4 = 4$ だから，$W_3 + W_4 = \mathbb{R}^4$．［注意］：W_4 の基底を求めて (2),(3) と同じ方法で考えてもよい．

$\boxed{6}$ 行列 A の零空間，行空間，列空間の基底は A の簡約行列をもとに考える．零空間 $N(A)$ の次元は A の列数 $-\,\mathrm{rank}\,A$ であり，基底は，同次連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の基本解を選べばよい．$\dim C(A) = \mathrm{rank}\,A$ であり，列空間の基底は簡約行列の主成分に対応する元の行列 A の列を取ればよい．$\dim R(A) = \mathrm{rank}\,A$ であり，行基本変形で行空間は変わらないので，簡約行列の 1 行目から $\mathrm{rank}\,A$ 行目までを取ればよい．

まず M について考える．$M = \begin{bmatrix} 3 & -5 & -1 & -3 & -9 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \to$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より，$\dim N(M) = 2$ で基底の一例は，$\left(\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$．$\dim C(M) = \mathrm{rank}\,M = 3$ で，主成分が 1,2,4 列にあることから，基底の一例は M の 1,2,4 列 $\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$．また，$\dim R(M) = \mathrm{rank}\,M = 3$ で，基底の一例は，$([1, 0, 3, 0, 2], [0, 1, 2, 0, 3], [0, 0, 0, 1, 0])$．

次に ${}^tM$ について考える．${}^tM = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ -5 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & -1 \\ -9 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 & -1 \\ 0 & 10 & 14 & 4 \\ 0 & -15 & -21 & -6 \\ 0 & -8 & -11 & -4 \\ 0 & -25 & -35 & -10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{7}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, $\dim N({}^tM) = 1$ で基底の一例は, $\left(\begin{bmatrix} -1 \\ -6 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$．$\dim C({}^tM) = \mathrm{rank}\,{}^tM = 3$ で, 主成分が 1, 2, 3

列にあることから，基底の一例は ${}^tM$ の $1,2,3$ 列 $\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ -1 \\ -3 \\ -9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$．また，$\dim R({}^tM) = \operatorname{rank}{}^tM = 3$ で，基底の一例は，$([1,0,0,1],[0,1,0,6],[0,0,1,-4])$.

［注意］：$R({}^tM)$ の基底は $C(M)$ の基底の転置，$C({}^tM)$ の基底は $R(M)$ の基底の転置を取っても可.