数学演習第二 演習第８回　微積：偏微分 [3]（陰関数・ラグランジュの未定乗数法）

2020 年 12 月 9 日 実施

- $\boxed{\textbf{小テスト}}$ の問題は $\boxed{1}$ の 4 問です. $\boxed{\textbf{レポート課題}}$ は $\boxed{2}$ の 4 問です.
- それ以外の問題は自習用問題です (こちらも是非解いて下さい).
- 要点もよく読くこと．レポート課題の答案には**答えだけでなく途中の計算も書いて下さい**.

【要点】

[1] 陰関数　D を $\mathbb{R}^2$ の空でない集合とし，$f(x,y)$ は D で定義された 2 変数の実数値関数とする．$f(x,y)=0$ ($(x,y)\in D$) をみたすとき，x と y は互いに関係し，x のある点の近くでは，y は x の関数と見なされる場合がある．つまり，ある点 a を含む開区間 $(a-r,a+r)$ で定義された 1 変数の実数値関数 $y=\varphi(x)$ が存在して

$$f(x,\varphi(x))=0 \qquad (a-r<x<a+r)$$

をみたすとき，$y=\varphi(x)$ を $f(x,y)=0$ で定義された**陰関数** (implicit function) という．微積の教科書の定理 4.4.1(陰関数の存在定理) は，$f(x,y)$ が領域（連結開集合）D において C^1 級で，かつある点 $(a,b)\in D$ に対して，$f(a,b)=0$, $f_y(a,b)\neq 0$ であれば，$f(x,y)=0$ の C^1 級の陰関数 $y=\varphi(x)$ が存在することを主張している．このとき，$f(x,\varphi(x))=0$ の両辺を x でそれぞれ微分すると，合成関数の微分に関する連鎖律 (定理 4.2.4) から

$$0=\frac{d}{dx}f(x,\varphi(x))=f_x(x,\varphi(x))+f_y(x,\varphi(x))\varphi'(x)$$

が成り立つ．ここで，$f_y(x,y)$ は点 (a,b) で連続なので，点 (a,b) の近くで $f_y(x,y)\neq 0$ に注意すると

$$\varphi'(x)=-\frac{f_x(x,\varphi(x))}{f_y(x,\varphi(x))},\ \text{あるいは，}\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}$$

と表される．更に，$f(x,y)$ が C^n 級ならば，陰関数 $\varphi(x)$ も C^n 級である．

[2] 2 変数関数のラグランジュの未定乗数法 (定理 4.4.2)　D を $\mathbb{R}^2$ の領域（連結開集合）とし，$f(x,y)$, $g(x,y)$ は D で定義され，C^1 級であるとする．また，$(x,y,\lambda)\in D\times\mathbb{R}$ に対して，3 変数関数

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)$$

を定める．条件 $g(x,y)=0$ の下で，$f(x,y)$ がある点 (a,b) で極値をとるとき，$g_x(a,b)\neq 0$ または $g_y(a,b)\neq 0$ であれば，ある実数 α が存在して

$$F_x(a,b,\alpha)=0,\ F_y(a,b,\alpha)=0,\ F_\lambda(a,b,\alpha)=0$$

が成り立つ．この λ をラグランジュ乗数 (Lagrange multiplier) ということがある．

【小テスト：オンライン受験】

$\boxed{1}$ $f(x,y) = x^4 + y^2 - 2$ に対して，$f(x,y) = 0$ で定義される陰関数 $y = \varphi(x)$ について，以下の問いにそれぞれ答えよ．

(1) 次の４つの関数のうち，$\varphi(x)$ の１つと一致する関数を <u>すべて</u> 選べ．

（ア）$\sqrt[4]{2 - x^2}$　　（イ）$\sqrt{2 - x^4}$　　（ウ）$\sqrt{x^4 - 2}$　　（エ）$-\sqrt{2 - x^4}$

(2) 次の４つの関数のうち，$\varphi'(x)$ の１つと一致する関数を <u>すべて</u> 選べ．

（ア）$-\dfrac{2x^3}{y}$　　（イ）$-\dfrac{y}{2x^3}$　　（ウ）$\dfrac{2x^3}{\sqrt{2 - x^4}}$　　（エ）$-\dfrac{2x^3}{\sqrt{2 - x^4}}$

(3) 曲線 $f(x,y) = 0$ 上の点 $(-1, 1)$ における接線の方程式を次の中から選べ．

（ア）$y = 2x - 3$　　（イ）$y = -2x - 1$　　（ウ）$y = 2x + 3$　　（エ）$y = -2x - 3$

(4) 次の４つの関数のうち，$\varphi''(x)$ と関数値が常に一致する関数を <u>すべて</u> 選べ．

（ア）$-\dfrac{2x^2(2x^4 + 3y^2)}{y^3}$　　（イ）$\dfrac{2x^2(x^4 - 6)}{y^3}$

（ウ）$-\dfrac{2x^2(y^2 + 4)}{y^3}$　　（エ）$\dfrac{2x^2(2x^4 + 3y^2)}{y^3}$

【レポート課題：オンライン提出】

$\boxed{2}$ $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 2x - y - 2$ に対して，$f(x,y) = 0$ で定義される陰関数 $y = \varphi(x)$ について，以下の問いにそれぞれ答えよ．

(1) $\varphi'(x)$ を x, y の式で表せ．

(2) $\varphi'(a) = 0$ をみたす a の値をすべて求めよ．

(3) $\varphi''(x)$ を x, y の式で表せ．

(4) $\varphi(x)$ の極値をすべて求めよ．

【それ以外の自習用問題】

$\boxed{3}$ (演習書 問題 5.2.3) 次の 2 変数関数 $f(x,y)$ に対して，$f(x,y)=0$ で定まる陰関数 $y=y(x)$ について，$y'(x)$, $y''(x)$ をそれぞれ x, y を用いて表せ．また，曲線 $f(x,y)=0$ 上の指定された点における接線の方程式を求めよ．

(0) $f(x,y)=2x^2-2xy+y^2-1 \quad (-\infty<x,\,y<\infty) \quad (0,1)$

(2) $f(x,y)=\sqrt{x}+\sqrt{y}-2 \quad (x \geqq 0,\ y \geqq 0) \quad (1,1)$

(4) $f(x,y)=\log\sqrt{x^2+y^2}-\mathrm{Tan}^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right) \quad (x \neq 0) \quad (1,0)$

(5) $f(x,y)=xe^y-y+1 \quad (-\infty<x,\,y<\infty) \quad (-1,0)$

$\boxed{4}$ $\boxed{3}$ のそれぞれの陰関数 $y=y(x)$ について，極値が存在すれば，それらをそれぞれ求めよ．また，$\boxed{3}$ のそれぞれの $f(x,y)$ について，曲線 $f(x,y)=0$ 上の点の y 座標の最大値・最小値が存在すれば，それらをそれぞれ求めよ．

$\boxed{5}$ 条件 $g(x,y):=x^2+y^4-3=0$ の下で，関数 $f(x,y)=xy$ の極値を調べる．
($A:=B$ は，A を B で定義する，プログラミング言語 PASCAL の記号に由来する．)

(1) ラグランジュの未定乗数法を適用するために，3 変数関数

$$F(x,y,\lambda):=f(x,y)+\lambda g(x,y)=xy+\lambda(x^2+y^4-3)$$

を導入し，条件 $g(x,y)=0$ の下で，$f(x,y)$ がある点 (a,b) で極値をとると仮定して，
a,b,α についての連立方程式

$$F_x(a,b,\alpha)=0,\ F_y(a,b,\alpha)=0,\ F_\lambda(a,b,\alpha)=0$$

を解き，極値をとる点 (a,b) の候補をすべて求めよ．

(2) 次に，それらの点 (a,b) の近くでの $g(x,y)=0$ より定まる陰関数 $x=\varphi(y)$ を考えて，f を 1 変数化した関数 $h(y):=f(\varphi(y),y)=y\,\varphi(y)$ の極値問題に帰着させる．そこで，$0=g(\varphi(y),y)=\{\varphi(y)\}^2+y^4-3$ の両辺をそれぞれ y で微分して，$\varphi'(b)$, $\varphi''(b)$ の値をそれぞれ計算せよ．

(3) (2) から，$h''(b)$ の値を求めて符号を調べ，微積の教科書の定理 2.3.2 を適用し，
$f(a,b)=h(b)$ が極値ならば，極大・極小の判定を行ない，その値も求めよ．

(4) $K:=\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid g(x,y)=0\,\}$ における $f(x,y)=xy$ の最大値と最小値を求めよ．