数学演習第二 演習第８回　微積：偏微分 [3]（陰関数・ラグランジュの未定乗数法） 解答例

2020 年 12 月 9 日 実施分

【小テストの解答例】

1

(1) 陰関数の定義より，$f(x,\varphi(x))=0$ をみたすので，方程式 $x^4+y^2-2=0$ を y について解いたものが $\varphi(x)$ である．よって，$\varphi(x)=y=\pm\sqrt{2-x^4}$ を得る． 答は **(イ)**，**(エ)**．

(2) $f_x(x,y)=4x^3$, $f_y(x,y)=2y$ から，$\varphi'(x)=-\dfrac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}=-\dfrac{2x^3}{y}$ と表される．
また，(1) より，$\varphi'(x)=\mp\dfrac{2x^3}{\sqrt{2-x^4}}$ とも書ける． 答は **(ア)**，**(ウ)**，**(エ)**．

(3) (2) から，$x=-1$, $y=1$ のとき，$\varphi'(-1)=-2(-1)^3=2$ なので，
求める接線の方程式は $y=\varphi'(-1)(x+1)+1=2x+3$ である．
なお，$y=1>0$ より，点 $(-1,1)$ の近傍における $f(x,y)=0$ の
陰関数 $y=\varphi(x)$ は $\varphi(x)=\sqrt{2-x^4}$ とわかる． 答は **(ウ)**．

(4) $0=\dfrac{d}{dx}f(x,\varphi(x))=f_x+f_y\,\varphi'=2(2x^3+\varphi\,\varphi')$ より，$2x^3+\varphi\,\varphi'=0$ をみたすので，
この両辺をそれぞれ x で微分すると，$6x^2+(\varphi')^2+\varphi\,\varphi''=0$ を得る．
ここで，(2) から，$\varphi'(x)=-\dfrac{2x^3}{y}$ なので，$6x^2+\dfrac{4x^6}{y^2}+y\,\varphi''=0$ を
φ'' について解くと，$\varphi''(x)=-\dfrac{6x^2}{y}-\dfrac{4x^6}{y^3}=-\dfrac{2x^2(2x^4+3y^2)}{y^3}$ と表される．
また，$f(x,y)=0$ より，$y^2=2-x^4$, $x^4=2-y^2$ をみたすので，
$\varphi''(x)=\dfrac{2x^2(x^4-6)}{y^3}=-\dfrac{2x^2(y^2+4)}{y^3}$ とも書ける． 答は **(ア)**，**(イ)**，**(ウ)**．

【レポート課題の解答例】

$\boxed{2}$ (1) $f_x(x,y)=2x-y+2,\ f_y(x,y)=-x+2y-1$ より

$$\varphi'(x)=-\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}=\boxed{\frac{2x-y+2}{x-2y+1}}$$

(2) $\varphi(a)=b$ とおくと，$\varphi'(a)=0$ のとき，(1) から，$2a-b+2=0$ をみたす．このとき，$b=2(a+1)$ なので

$$\begin{aligned}0=f(a,b)&=a^2-2a(a+1)+4(a+1)^2+2a-2(a+1)-2\\&=3a^2+6a=3a(a+2)\end{aligned}$$

を得る．よって，$\varphi'(a)=0$ をみたす a の値は $\boxed{0,-2}$ とわかる．

(3) (1) の式は

$$2x-\varphi+2-(x-2\varphi+1)\varphi'=0$$

とも表されるので，この両辺をそれぞれ x で微分すると

$$\begin{aligned}0&=2-\varphi'-(1-2\varphi')\varphi'-(x-2\varphi+1)\varphi''\\&=2\{1-\varphi'+(\varphi')^2\}-(x-2\varphi+1)\varphi''\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで，(1) から

$$\begin{aligned}1-\varphi'+(\varphi')^2&=1-\frac{2x-y+2}{x-2y+1}+\left(\frac{2x-y+2}{x-2y+1}\right)^2\\&=\frac{3f(x,y)+9}{(x-2y+1)^2}=\frac{9}{(x-2y+1)^2}\end{aligned}$$

に注意すると，$\varphi''(x)=\boxed{\dfrac{18}{(x-2y+1)^3}}$ を得る．

(4) (2) の結果と微積の教科書の定理 2.2.1 (2) より，$\varphi(x)$ が極値をとる候補の点 a は $a=0,-2$ に限られる．そこで，(3) の結果から

$$\varphi''(0)=\frac{18}{(-4+1)^3}=-\frac{2}{3}<0,\quad \varphi''(-2)=\frac{18}{(-2+4+1)^3}=\frac{2}{3}>0$$

なので，微積の教科書の定理 2.3.2 により，$\varphi(x)$ は点 $x=0$ で極大値 $\varphi(0)=2$ をとり，点 $x=-2$ で極小値 $\varphi(-2)=-2$ をとる．

【補足】曲線 $f(x,y)=0$ は楕円で，2, -2 はそれぞれその楕円上の点の y 座標の最大値，最小値である．$f(x,y)=0$ は $\left(x-\dfrac{y}{2}+1\right)^2+\dfrac{3}{4}y^2=3$ と表されるので，$\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,f(x,y)=0\,\}$ は有界かつ閉集合である．よって，ワイエルシュトラスの定理「有界閉集合における連続関数は必ず最大値と最小値をとる」を適用すれば理論的に楕円 $f(x,y)=0$ 上の点の y 座標の最大値，最小値の存在が保証される．具体的には，$\varphi(x)=\dfrac{1}{2}\left(x+1+\sqrt{3(1-x)(x+3)}\right)$ $(-3\leqq x\leqq 1)$ の最大値が $\varphi(0)=2$ で，$\varphi(x)=\dfrac{1}{2}\left(x+1-\sqrt{3(1-x)(x+3)}\right)$ $(-3\leqq x\leqq 1)$ の最小値が $\varphi(-2)=-2$ であることがわかる．しかしながら，$\dfrac{3}{4}y^2\leqq\left(x-\dfrac{y}{2}+1\right)^2+\dfrac{3}{4}y^2=3$ から，$y^2\leqq 4$ なので，y 座標の最大値，最小値がそれぞれ 2, -2 であることは容易に知られる．なお，上記のワイエルシュトラスの定理の証明を知りたい方は微分積分学の標準的な教科書，例えば杉浦 光夫 著『解析入門 I』(東京大学出版会)，定理 7.3 (68–69 頁) 辺りを見ればよい．

【それ以外の自習用問題の解答例】

$\boxed{3}$ 2 変数関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) の近くで C^1 級のとき, $f(a,b)=0$, $f_y(a,b)\neq 0$ ならば, (a,b) の近くで $f(x,y)=0$ という関係は x の C^1 級関数 $y=y(x)$ の形に表される．この '陰関数' $y(x)$ は $f(x,y(x))=0$ をみたす．（これは記号の濫用で本来は $y=\varphi(x)$ などと別な文字で書く方が正当である．）陰関数は (a,b) の近くで一意的に定まるが，$x=a$ の近くでは一意とは限らない．例えば，$x^2+y^2-1=0$ の陰関数は $y(x)=\pm\sqrt{1-x^2}$ である．

(0)　$0=f(x,y(x))=2x^2-2xy+y^2-1$ の両辺をそれぞれ x で微分すると

$$0=4x-2y-2xy'+2yy'=2(2x-y)-2(x-y)y' \qquad \therefore y'(x)=\frac{2x-y}{x-y} \quad 特に \quad y'(0)=1$$

よって，点 $(0,1)$ における $y=y(x)$ の接線の方程式は　$y=y'(0)x+1=x+1$

そして，$0=2x-y-xy'+yy'$ の両辺をそれぞれ x で微分して

$$0=2-y'-y'-xy''+(y')^2+yy''=2-2y'+(y')^2-(x-y)y'' \qquad \therefore y''(x)=\frac{2-2y'+(y')^2}{x-y}$$

ここで，$y''(x)$ に $y'(x)$ の計算結果の式を代入するのは賢明でなく，$(x-y)y'=2x-y$ に注目して

$$(x-y)^2\{2-2y'+(y')^2\}=2(x-y)^2-2(x-y)\{(x-y)y'\}+\{(x-y)y'\}^2=(x-y)^2+\{(x-y)-(2x-y)\}^2$$

$$=(x-y)^2+x^2=1 \qquad \therefore y''(x)=\frac{1}{(x-y)^3} \ \ (\neq 0)$$

(2)　$0=\sqrt{x}+\sqrt{y}-2$ の両辺をそれぞれ x で微分すると　$0=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{y'}{2\sqrt{y}}$　　$\therefore y'(x)=-\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}=-\sqrt{\dfrac{y}{x}}$

特に，$y'(1)=-1$ より，点 $(1,1)$ における求める接線の方程式は　$y=y'(1)(x-1)+1=-x+2$

そして，$0=x(y')^2-y$ の両辺をそれぞれ x で微分すれば

$$0=(y')^2+2xy'y''-y' \quad \therefore y''(x)=\frac{y'-(y')^2}{2xy'}=\frac{1}{2x}\left(1+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)$$

【補足 1】$\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$ より $y=(2-\sqrt{x}\,)^2$ と陰関数が具体的に表される．実はこれを用いた方が簡単になる．

【補足 2】曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$ を原点回りに 45° 回転させると, この曲線が放物線であることがわかる (確認せよ).

(4)　$0=\log\sqrt{x^2+y^2}-\mathrm{Tan}^{-1}(y/x)=\dfrac{1}{2}\log(x^2+y^2)-\mathrm{Tan}^{-1}(y/x)$ の両辺をそれぞれ x で微分すると

$$0=\frac{1}{2}\frac{2x+2yy'}{x^2+y^2}-\frac{(y'x-y)/x^2}{1+(y/x)^2}=\frac{(y-x)y'+(x+y)}{x^2+y^2} \qquad \therefore y'(x)=\frac{x+y}{x-y}$$

特に，$y'(1)=1$ から，点 $(1,0)$ における求める接線の方程式は　$y=y'(1)(x-1)=x-1$

そして，$0=(x-y)y'-(x+y)$ の両辺をそれぞれ x で微分すれば

$$0=(1-y')y'+(x-y)y''-(1+y')=(x-y)y''-(y')^2-1 \quad \therefore y''(x)=\frac{(y')^2+1}{x-y}=\frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$$

【補足】上の結果より $f(x,y)=0$ は同次形の微分方程式 $y'=\dfrac{1+(y/x)}{1-(y/x)}$ の特殊解であることがわかる．また，曲線 $f(x,y)=0$ は原点に関して対称であり，極座標 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ を使うと $x>0$ $(-\pi/2<\theta<\pi/2)$ においては $r=e^\theta$ (あるいは $\theta=\log r$) と簡潔に表示される．なお，極座標表示で $r=ae^{b\theta}$ ($a>0, b\neq 0$ は定数) と表される曲線は対数螺線 (あるいはベルヌーイの螺線) と呼ばれる．

(5)　$0=x\,e^y-y+1$ の両辺をそれぞれ x で微分すると

$$0=e^y+x\,e^yy'-y' \quad \therefore y'(x)=\frac{e^y}{1-x\,e^y}=\frac{e^y}{2-y}$$

特に，$y'(-1)=\dfrac{1}{2}$ なので，点 $(-1,0)$ における求める接線の方程式は　$y=y'(-1)(x+1)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$

そして，$0=(2-y)y'-e^y$ の両辺をそれぞれ x で微分すれば

$$0=-(y')^2+(2-y)y''-e^yy'=(2-y)y''-(y'+e^y)y'=(2-y)y''-\frac{(3-y)e^{2y}}{(2-y)^2}$$

$$\therefore y''(x)=\frac{(3-y)e^{2y}}{(2-y)^3}\left(=\frac{e^{2y}(2-x\,e^y)}{(1-x\,e^y)^3}\right)$$

4 (0) 陰関数 $y(x)$ が極値をとる点では $y'=0$ より $y=2x$ で，これを $f(x,y)=0$ に代入して，$2x^2-1=0$ から，$x=\pm 1/\sqrt{2}$ を得る．このとき，$y''(\pm 1/\sqrt{2})=\mp 2\sqrt{2}\leqq 0$ (複号同順) なので，$y(x)$ は $x=-1/\sqrt{2}$ で極小値 $-\sqrt{2}$ をとり，$x=1/\sqrt{2}$ で極大値 $\sqrt{2}$ をとる．しかし，これらが y 座標の最小値や最大値であるか否かは上の議論ではわからない．そこで $y(x)$ の具体的な形を用いる．$f(x,y)=(y-x)^2+x^2-1$ より，$-1\leqq x\leqq 1$ で，$-\sqrt{2}\leqq x-\sqrt{1-x^2}\leqq y(x)\leqq x+\sqrt{1-x^2}\leqq\sqrt{2}$ は容易であろう．よって，$y(x)$ の極小値および最小値は $y(-1/\sqrt{2})=-\sqrt{2}$ で，$y(x)$ の極大値および最大値は $y(1/\sqrt{2})=\sqrt{2}$. ($x=\cos\theta,\, y-x=\sin\theta$ としてもよい.)

(2) $x\geqq 0,\, \sqrt{x}\leqq 2$ より，$0\leqq x\leqq 4$ で，$y'(x)\leqq 0$ から，$y(x)$ は単調減少なので，y 座標の最大値は $y(0)=4$, 最小値は $y(4)=0$ である．また，$0<x<4$ では $y'(x)<0$ なので，平均値の定理（教科書の定理 2.2.3）から，$y(x)$ の極大値は $y(0)=4$，極小値は $y(4)=0$ がわかる．(なお，$y=(2-\sqrt{x})^2$ で見れば微分法は無用である.)

(4) 陰関数 $y(x)$ が極値をとる点では $\dfrac{x+y}{x-y}=y'=0$ より $y=-x$ である．これを $\log\sqrt{x^2+y^2}-\mathrm{Tan}^{-1}(y/x)=0$ に代入して，$\log(\sqrt{2}\,|x|)=\mathrm{Tan}^{-1}(-1)=-\dfrac{\pi}{4}$ を得る．よって，$y(x)$ の極値を与える点 (候補) は $(x,y)=\left(\pm\dfrac{e^{-\pi/4}}{\sqrt{2}},\mp\dfrac{e^{-\pi/4}}{\sqrt{2}}\right)$．これらの点で $y''=\pm\dfrac{e^{\pi/4}}{\sqrt{2}}\gtrless 0$ (複号同順) であるから，$y(x)$ は $x=-\dfrac{e^{-\pi/4}}{\sqrt{2}}$ で極大値 $\dfrac{e^{-\pi/4}}{\sqrt{2}}$ をとり，$x=\dfrac{e^{-\pi/4}}{\sqrt{2}}$ で極小値 $-\dfrac{e^{-\pi/4}}{\sqrt{2}}$ をとる．さらに極座標 $x=r\cos\theta,\, y=r\sin\theta$ を用いると，y 座標の最大値も最小値もないことも（グラフでなく，θ で表した $y'(x)$ の符号を調べることで）わかるが割愛する．(勿論，$y'(x)=(x+y)/(x-y)$ より，$y'(x)>0$ は $-|x|<y<|x|$ なので，$y(x)$ は領域 $y^2<x^2$ で単調増加し，領域 $y^2>x^2$ で単調減少するのはよい.)

(5) $x=(y-1)e^{-y}$ と変形できるので，$y(x)$ は極値をとらず，最大値も最小値も存在しないことは容易に知られる．実際，y の関数 $x=(y-1)e^{-y}$ の増減を調べれば，$y(x)$ は $x\leqq e^{-2}, y\leqq 2$ の範囲と，$0<x\leqq e^{-2}, y\geqq 2$ の範囲でそれぞれ一意に定まり，$y'(x)>0$ $(x<e^{-2}, y<2)$, $y'(x)<0$ $(0<x<e^{-2}, y>2)$ となることがわかる．さらに，$\displaystyle\lim_{y\to-\infty}x(y)=-\infty,\ \lim_{y\to\infty}x'(y)=\lim_{y\to\infty}(2-y)e^{-y}=0$ なので，$y(x)$ は $x\leqq e^{-2}$ で定義され，上に有界でなく，下に有界でもない．特に $y(x)$ は極値をとらず，最大値も最小値も存在しない．(以上のように $y'(x)$ が x, y の式で書けると，$y(x)$ の極値を求める事には有用でも，定義域が非有界だと，肝心な最大値や最小値の存在を調べるには別の考察を要する場合が多い.)

5 (1) 条件 $g(x,y)=0$ の下で，$f(x,y)$ が点 (a,b) で極値をとれば，$g_x(a,b)=2a\neq 0$ または $g_y(a,b)=4b^3\neq 0$ なので，ラグランジュの未定乗数法が適用でき，ある実数 α が存在して

(i) $$0=F_x(a,b,\alpha)=b+2a\alpha$$

(ii) $$0=F_y(a,b,\alpha)=a+4b^3\alpha$$

(iii) $$0=F_\lambda(a,b,\alpha)=g(a,b)=a^2+b^4-3$$

が成り立つ．ここで，α の値は不要だから，α を消去するために，(i)$\times 2b^3-$(ii)$\times a$ を計算して，$2b^4-a^2=0$, $a=\pm\sqrt{2}b^2$ を得る．これを (iii) に代入すると，$0=3(b^4-1)$ で，b は実数なので，$b=\pm 1$ がわかる．よって，$(a,b)=(\pm\sqrt{2},\pm 1)$（複号任意）を得る．$a, b$ を α で表す必要はない．演習書の例題 5.9 の $\boxed{\text{注意}}$ にあるように，ここまでで実は (4) がわかる．実際，$-\sqrt{2}\leqq f(x,y)\leqq\sqrt{2}$ は $x^2y^2\leqq 2$ と同値で，$g(x,y)=0$ のときは，$p(y):=y^6-3y^2+2\geqq 0$ とも同値なことに着眼すると，p の因数分解 $p(y)=(y^2-1)^2(y^2+2)$ からわかる．しかし，三宅氏の微積の教科書にはワイエルシュトラスの定理は記載されていないため，以下ではそれを引用しない．

(2) 他の場合も同様なので，$(a,b)=(\sqrt{2},1)$ の場合のみ述べる．指示にある通り，$0=g(\varphi(y),y)=\{\varphi(y)\}^2+y^4-3$ の両辺をそれぞれ y で微分すると，$0=2\varphi\varphi'+4y^3$ より，特に $\varphi'(1)=-2/\varphi(1)=-\sqrt{2}$ を得る．次に，$0=\varphi\varphi'+2y^3$ の両辺をそれぞれ y で微分すると，$0=(\varphi')^2+\varphi\varphi''+6y^2$ から，特に $\varphi''(1)=-8/\varphi(1)=-4\sqrt{2}$ がわかる．$(a,b)=(-\sqrt{2},-1)$ の場合も同様で，$\varphi'(-1)=-\sqrt{2}$, $\varphi''(1)=4\sqrt{2}$ を得る．最後に，$(a,b)=(\pm\sqrt{2},\mp 1)$（複号同順）の場合には，$\varphi'(\mp 1)=\sqrt{2}$, $\varphi''(\mp 1)=\mp 4\sqrt{2}$ となる．因みに，$g(x,y)=0$ の陰関数 $y=\psi(x)$ $(=\pm\sqrt[4]{3-x^2})$ を考えても同様に議論できるが，この方が計算は難しくなる．これが $x=\varphi(y)$ を選ぶ理由だ．

(3) $h'(y)=\varphi(y)+y\varphi'(y)$ を微分して，$h''(y)=2\varphi'(y)+y\varphi''(y)$ より，$(a,b)=(\sqrt{2},1)$ の場合は $h''(1)=-2\sqrt{2}-4\sqrt{2}=-6\sqrt{2}<0$ なので，$f(\sqrt{2},1)=h(1)=\sqrt{2}$ は極大値である．$f(-\sqrt{2},-1)=h(-1)=\sqrt{2}$ も極大値である．最後に，$(a,b)=(\pm\sqrt{2},\mp 1)$（複号同順）の場合には，$h''(\mp 1)=6\sqrt{2}>0$ だから，$f(\pm\sqrt{2},\mp 1)=h(\mp 1)=-\sqrt{2}$ は極小値である．要は $ab=b\varphi(b)$ の符号で決まる．$\varphi(y)$ の具体的な形を使わずに議論できていることにも注目しよう．必要なのはその微分係数の値である．これがラグランジュの未定乗数法の汎用性を示す．

(4)　素朴には $\varphi(y) = \pm\sqrt{3-y^4}$ を用いるだろう．つまり，$h(y) = \pm y\sqrt{3-y^4}$ $(-\sqrt[4]{3} \leqq y \leqq \sqrt[4]{3})$ の増減を調べる．但し，$h(y)$ は奇関数なので，$u(y) := y\sqrt{3-y^4}$ を考えればよい．そこで，$-\sqrt[4]{3} < y < \sqrt[4]{3}$ ならば，$u'(y) = \sqrt{3-y^4} - \dfrac{2y^4}{\sqrt{3-y^4}} = \dfrac{3(1-y^4)}{\sqrt{3-y^4}}$ より，$1 < |y| < \sqrt[4]{3}$ のとき $u'(y) < 0$ で，$|y| < 1$ のとき $u'(y) > 0$ だから，$u(\pm\sqrt[4]{3}) = 0$ にも注意して，$u(y)$ の最大値は $u(1) = \sqrt{2}$ で，$u(y)$ の最小値は $u(-1) = -\sqrt{2}$ であることがわかる．よって，$-\sqrt{2} = u(-1) \leqq h(y) \leqq u(1) = \sqrt{2}$ $(-\sqrt[4]{3} \leqq y \leqq \sqrt[4]{3})$ なので，求める $f(x,y)$ の最大値は $f(\pm\sqrt{2}, \pm 1) = \sqrt{2}$（複号同順）で，最小値は $f(\pm\sqrt{2}, \mp 1) = -\sqrt{2}$（複号同順）である．

【補足】代数的に解くこともできる．不等式 $\dfrac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$ $(a>0, b>0, c>0)$ を利用すると

$$3 = x^2 + y^4 = \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} + y^4 \geqq 3\sqrt[3]{\left(\frac{x^2}{2}\right)^2 y^4} = \frac{3}{2^{2/3}}\,|xy|^{4/3}$$

が成り立つ．よって，$|xy| \leqq (2^{2/3})^{3/4} = \sqrt{2}$ を得る．ここで, 等号が成り立つのは $\dfrac{x^2}{2} = y^4$ のときで, $g(x,y) = 0$ より，$x = \pm\sqrt{2}, y = \pm 1$（複号任意）がわかる．即ち，ここでも $\varphi(y)$ の具体的な形を実は使わなくても済ませられる．ただし，このような代数的解法が有効なのは $f(x,y)$ や $g(x,y)$ が簡単な関数の場合に限られるため，一般には全く勧められない．条件付きの極値問題にはやはりラグランジュの未定乗数法の運用を考えるべきである．