数学演習第二 (演習第 9 回)

線形：線形写像, 核と像

2020 年 12 月 16 日

- **小テスト** の問題は $\boxed{1}$ の 4 問です. **レポート課題** は $\boxed{2}$ の 4 問です.
- それ以外の問題は自習問題です (こちらも是非解いて下さい).
- 要点を読んでから取り組むとよいでしょう.

【要点】

- 線形写像

V, W をベクトル空間とする. 写像 $f : V \to W$ が以下の条件をみたすとき線形写像であるという.

(1) f は V と W のベクトルの和を保つ : $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in V$ に対し $f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = f(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{b})$

(2) f は V と W のスカラー倍を保つ : $\boldsymbol{a} \in V$, $k \in \mathbb{R}$ に対し $f(k\boldsymbol{a}) = kf(\boldsymbol{a})$

写像が線形写像 <u>でない</u> ことを示すには, 条件 (1), (2) をみたさない反例を 1 つ挙げればよい.

特に, (1), (2) から導かれる性質

(0) f は V の零ベクトルを W の零ベクトルに移す : $f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$

をみたさない場合, f は線形写像ではない..

例 1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $f\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+1 \\ b+1 \end{bmatrix}$ は $f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ であるため線形写像ではない.

もちろん, 性質 (0) をみたしても写像が線形写像であるとは限らない.

例 2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x^2 - y^2 \\ xy \end{bmatrix}$ は $f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ をみたすが,

$f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 2f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ となるため, 線形写像ではない.

一方, 写像 $f : V \to W$ が線形写像であることを示すには, 任意のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ と $k \in \mathbb{R}$ に対して, (1), (2) が成り立つことを示す必要がある.

例 3) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $f\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ a_1 - a_2 \end{bmatrix}$ が線形写像であることを示す.

(1) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2$ を $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ とするとき $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{bmatrix}$ なので,

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) &= \begin{bmatrix} (a_1+b_1)+(a_2+b_2) \\ (a_1+b_1)-(a_2+b_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_1+a_2)+(b_1+b_2) \\ (a_1-a_2)+(b_1-b_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+a_2 \\ a_1-a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1+b_2 \\ b_1-b_2 \end{bmatrix} \\ &= f(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{b}) \end{aligned}$$

(2) $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$ とするとき, $k\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} ka_1 \\ ka_2 \end{bmatrix}$ なので,

$$f(k\boldsymbol{a}) = \begin{bmatrix} ka_1 + ka_2 \\ ka_1 - ka_2 \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ a_1 - a_2 \end{bmatrix} = kf(\boldsymbol{a})$$

- 線形写像の決定

  V, W をベクトル空間, $(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ を V の基底, $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ を W のベクトルとするとき,

  $f(\boldsymbol{a}_1) = \boldsymbol{b}_1, \ldots f(\boldsymbol{a}_n) = \boldsymbol{b}_n$, をみたす線形写像 $f : V \to W$ は 1 つに定められる.

  これは, $(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ が V の基底であることから, 任意の $\boldsymbol{a} \in V$ に対して, $\boldsymbol{a} = c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n$ と 1 通りに表すことができ, さらに f が線形写像であることから

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{a}) &= f(c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n) = f(c_1\boldsymbol{a}_1) + \cdots + f(c_n\boldsymbol{a}_n) \\ &= c_1 f(\boldsymbol{a}_1) + \cdots + c_n f(\boldsymbol{a}_n) = c_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{b}_n \end{aligned}$$

  と, $f(\boldsymbol{a})$ を定められることによる.

例 4) $f\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$, $f\left(\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ をみたす線形写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ があるとき, 一般のベクトル $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ について $f\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right)$ を求める.

まず, $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ を $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ の一次結合で表すと, $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}$ となるので, 連立一次方程式を解いて $\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2x_1 - x_2\\-x_1 + x_2\end{bmatrix}$ を得る.

これより, $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = (2x_1 - x_2)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + (-x_1 + x_2)\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$. ここで, f は線形写像なので,

$$\begin{aligned} f\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right) &= (2x_1 - x_2) f\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right) + (-x_1 + x_2) f\left(\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right) = (2x_1 - x_2)\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + (-x_1 + x_2)\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\-x_1 + 2x_2\end{bmatrix}. \end{aligned}$$

- 線形写像の核, 像

  V, W をベクトル空間, $f : V \to W$ を線形写像とするとき,

  $\mathrm{Ker}(f) = \{\boldsymbol{a} \in V \mid f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}_W\}$ を f の核, $\mathrm{Im}(f) = \{f(\boldsymbol{a}) \mid \boldsymbol{a} \in V\}$ を f の像と呼ぶ.

  $\mathrm{Ker}(f), \mathrm{Im}(f)$ はそれぞれ V, W の部分空間になる.

  A を $m \times n$ 行列とする. $f_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定義される写像 $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ は線形写像になるが,

  $\mathrm{Ker}(f_A) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ は同次連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間 $N(A)$ に一致する.

  また, $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ を $\mathbb{R}^n$ の標準基底とするとき, $\mathrm{Im}(f_A)$ は $f_A(\boldsymbol{e}_1), \ldots, f_A(\boldsymbol{e}_n)$ で生成される : $\mathrm{Im}(f_A) = \langle f_A(\boldsymbol{e}_1), \ldots, f_A(\boldsymbol{e}_n)\rangle$

  ここで, $A = [\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n]$ とするとき $f_A(\boldsymbol{e}_1) = A\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{a}_1, \ldots, f_A(\boldsymbol{e}_n) = A\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{a}_n$ となるため, $\mathrm{Im}(f) = \langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\rangle$, すなわち, $\mathrm{Im}(f)$ は A の列空間 $C(A)$ に一致する.

- 単射, 全射

  写像 $f : V \to W$ が単射であるとは $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$, $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b} \implies f(\boldsymbol{a}) \neq f(\boldsymbol{b})$ であることをいう.

  また f が全射であるとは, $f(V) = W$ であることをいう.

  f が線形写像であるとき,

$$f \text{ が単射} \iff \dim \mathrm{Ker}(f) = 0 (\iff \mathrm{Ker}(f) = \{\boldsymbol{0}\})$$
$$f \text{ が全射} \iff \dim \mathrm{Im}(f) = \dim W$$

  が成り立つ.

【小テスト，レポート課題】

$\boxed{1}$ **(小テスト)**

(1) 次に挙げる写像のうち, 線形写像でないものを <u>すべて</u> 選べ.

（ア） $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3x$

（イ） $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ f\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x+y\\xy\end{bmatrix}$

（ウ） $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3,\ f(x)=x\boldsymbol{a}+(1-x)\boldsymbol{b}$

ここで, $\boldsymbol{a}={}^t[1,1,0]$, $\boldsymbol{b}={}^t[1,0,1]$,

（エ） $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\ f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}$ ここで, $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^3$

(2) $f\left(\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$, $f\left(\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}$ をみたす線形写像 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ に対し,

$f\left(\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right)$ の最初の成分は何か.

（ア） 0　　**（イ）** $\dfrac{1}{2}$　　**（ウ）** $\dfrac{5}{9}$　　**（エ）** 1

(3) 4×5 行列 $A=\begin{bmatrix}1&2&1&-3&2\\3&6&4&2&-1\\5&10&6&-4&3\\2&4&1&-17&11\end{bmatrix}$ に対して, 線形写像 $f_A:\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}^4$ を $f_A(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ とするとき, $\dim\mathrm{Ker}(f_A)$ の値を次の中から選べ.

（ア） 1　　**（イ）** 2　　**（ウ）** 3　　**（エ）** 4

(4) (3) の線形写像 f_A に対し $\dim\mathrm{Im}(f_A)$ の値を次の中から選べ.

（ア） 1　　**（イ）** 2　　**（ウ）** 3　　**（エ）** 4

$\boxed{2}$ **(レポート課題)**

(1) $f\left(\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-4\\-7\\12\end{bmatrix}$, $f\left(\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\4\\-6\end{bmatrix}$, をみたす線形写像 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ に対して, $f\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right)$ を求めよ.

(2) $f\left(\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$, $f\left(\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix}$, $f\left(\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix}$ をみたす線形写像 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ に対して, $f\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right)$ を求めよ.

(3) $A=\begin{bmatrix}3 & -2 & 10 & 2a+5\\9 & 1 & 2 & 1-a\\9 & 4 & -10 & -5a-2\end{bmatrix}$ に対して, 線形写像 $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$, $f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ が全射にならないための a がみたす条件を求めよ. このとき, $\mathrm{Im}(f)$ の次元と基底をもとめよ.

(4) (3) の行列 A について $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$, $g(\boldsymbol{x})={}^t A\boldsymbol{x}$ が単射にならないための a がみたす条件を求めよ. このとき, $\mathrm{Ker}(g)$ の次元と基底をもとめよ.

【それ以外の自習用の問題】

$\boxed{3}$ 次の写像は線形写像になるか．線形写像である場合にはそれを示し，線形写像でない場合にはその理由を述べよ．

(1) $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_3 \end{bmatrix}$ で定義される写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

(2) $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 + 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 1 \end{bmatrix}$ で定義される写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

(3) $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2$ で定義される写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

(4) $f(p(t)) = p'(t)$ で定義される写像 $f : \mathbb{R}[t]_3 \to \mathbb{R}[t]_2$ (下の注釈を参照)

$\boxed{4}$ $m \times n$ 行列 A を次のように定めるとき，おのおのの A が決める $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線形写像 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ について以下の問に答えよ．

$$\text{(ii)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(iv)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{(v)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

(1) $\mathrm{Ker}(f)$ の次元と基底を求めよ．($\{\mathbf{0}\}$ の場合，基底は無し，次元は 0 であることに注意せよ．)
(2) $\mathrm{Im}(f)$ の次元と基底を求めよ．
(3) f は 1 対 1 写像であるか，上への写像であるか．

$\boxed{5}$ $\mathbb{R}[t]_3$ を 3 次以下の多項式全体からなる線形空間とする．
線形写像 $D : \mathbb{R}[t]_3 \to \mathbb{R}[t]_3$ (下の注釈を参照) を

$$D(p(t)) = 2p(t) - (t+1)p'(t) \qquad (p(t) \in \mathbb{R}[t]_3)$$

と定義するとき，D の核および像の次元および基底を求めよ．

$\mathbb{R}[t]_n = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n \mid a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$ (n 次以下の実係数 1 変数多項式全体) は，基底として $(1, t, t^2, \ldots, t^n)$ が取れるような，$n+1$ 次元ベクトル空間である．