数学演習第二（第 9 回）線形：線形写像，核と像　解答例　2020 年 12 月 16 日実施

【小テストの解答例】

$\boxed{1}$ (1)**（ア）** $x, y \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{R}$ について, $f(x+y) = 3(x+y) = 3x+3y = f(x)+f(y)$, $f(kx) = 3(kx) = k(3x) = kf(x)$ が成り立つので, 線形写像である.

（イ） $f\left(\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}4\\4\end{bmatrix} \neq 2\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = 2f\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)$ より, 線形写像ではない.

（ウ） $f(0) = \boldsymbol{b} = {}^t[1,0,1] \neq \boldsymbol{0}$ より, 線形写像ではない.

（エ） ベクトル積の性質より, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3, k \in \mathbb{R}$ について, $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y})$, $f(k\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}\times(k\boldsymbol{x}) = k\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{x} = kf(\boldsymbol{x})$ が成り立つので, 線形写像である.

以上より, 線形写像でないのは, **（イ）**, **（ウ）**

(2) まず, $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ を $\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}$ の 1 次結合で表す: $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & 5\\5 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}$. このとき,

$\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & 5\\5 & 4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = -\dfrac{1}{9}\begin{bmatrix}4 & -5\\-5 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = -\dfrac{1}{9}\begin{bmatrix}3\\-6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1/3\\2/3\end{bmatrix}$ より $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = -\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix} + \dfrac{2}{3}\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}$.

これより, $f\left(\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right) = -\dfrac{1}{3}f\left(\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}\right) + \dfrac{2}{3}f\left(\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}\right) = -\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} + \dfrac{2}{3}\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ となる.

よって答は**（エ）** 1

(3) 問題の行列 A を簡約化すると, $A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & -3 & 2\\3 & 6 & 4 & 2 & -1\\5 & 10 & 6 & -4 & 3\\2 & 4 & 1 & -17 & 11\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & -3 & 2\\0 & 0 & 1 & 11 & -7\\0 & 0 & 1 & 11 & -7\\0 & 0 & -1 & -11 & 7\end{bmatrix} \to$

$\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & -14 & 9\\0 & 0 & 1 & 11 & -7\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ より, 任意の $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix} \in \operatorname{Ker} f$ は $\boldsymbol{x} = s\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}14\\0\\-11\\1\\0\end{bmatrix} + u\begin{bmatrix}-9\\0\\7\\0\\1\end{bmatrix}$ と

表される. よって, $\operatorname{Ker}(f_A)$ の基底として $\left(\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}14\\0\\-11\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-9\\0\\7\\0\\1\end{bmatrix}\right)$ をとることができる.

答は**（ウ）** 3.

(4) (3) の簡約化の結果より $\operatorname{Im}(f_A)$ の基底として $\left(\begin{bmatrix}1\\3\\5\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\4\\6\\1\end{bmatrix}\right)$ をとることができる. 答は**（イ）** 2

【レポート課題の解答例】

$\boxed{2}$ (1) 1 次結合 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5&4\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}$. を考える. このとき, $\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5&4\\2&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&-4\\-2&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix}x_1-4x_2\\-2x_1+5x_2\end{bmatrix}$ より $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \frac{-x_1+4x_2}{3}\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix} + \frac{2x_1-5x_2}{3}\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}$. これより,

$$f\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right) = \frac{-x_1+4x_2}{3}f\left(\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}\right) + \frac{2x_1-5x_2}{3}f\left(\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}\right) = \frac{-x_1+4x_2}{3}\begin{bmatrix}-4\\-7\\12\end{bmatrix} + \frac{2x_1-5x_2}{3}\begin{bmatrix}1\\4\\-6\end{bmatrix}$$

$= \begin{bmatrix}2x_1-7x_2\\5x_1-16x_2\\-8x_1+26x_2\end{bmatrix}$ となる.

(2) 1 次結合 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2c_1+c_2+c_3\\c_1+2c_2+c_3\\c_1+c_2+2c_3\end{bmatrix}$ を考える.

このとき, $x_1+x_2+x_3 = 4(c_1+c_2+c_3)$ が成り立つので, $c_1+c_2+c_3 = (x_1+x_2+x_3)/4$.

これより $c_1 = x_1-(c_1+c_2+c_3) = (3x_1-x_2-x_3)/4$. 同様に $c_2 = (-x_1+3x_2-x_3)/4$, $c_3 = (-x_1-x_2+3x_3)/4$. となるので, $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \frac{3x_1-x_2-x_3}{4}\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix} + \frac{-x_1+3x_2-x_3}{4}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} + \frac{-x_1-x_2+3x_3}{4}\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$.

よって,

$$f\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right) = \frac{3x_1-x_2-x_3}{4}f\left(\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}\right) + \frac{-x_1+3x_2-x_3}{4}f\left(\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}\right) + \frac{-x_1-x_2+3x_3}{4}f\left(\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}\right) = \frac{3x_1-x_2-x_3}{4}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + \frac{-x_1+3x_2-x_3}{4}\begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix} + \frac{-x_1-x_2+3x_3}{4}\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-x_1+x_2+3x_3\\x_1+3x_2-x_3\\3x_1-x_2+x_3\end{bmatrix}.$$

(3) 行列 A を行基本変形して $A = \begin{bmatrix}3&-2&10&2a+5\\9&1&2&1-a\\9&4&-10&-5a-2\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}3&-2&10&2a+5\\0&7&-28&-7a-14\\0&10&-40&-11a-17\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}3&-2&10&2a+5\\0&1&-4&-a-2\\0&0&0&-a+3\end{bmatrix}$ を得るので, $\operatorname{rank} A = 2\ (a=3),\ = 3\ (a \neq 3)$.

これより, f が全射にならないためには, $\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rank}(A) < 3$ であればよいので, 条件 $a=3$ を得る.

このとき, $\dim \operatorname{Im} f = 2$ で, A を簡約化したときの主成分は 1 列と 2 列に表れるので, $\operatorname{Im} f$ の基底として, $\left(\begin{bmatrix}3\\9\\9\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\1\\4\end{bmatrix}\right)$ をとることができる.

(4) ${}^tA$ を行基本変形して $\begin{bmatrix}3&9&9\\-2&1&4\\10&2&-10\\2a+5&1-a&-5a-2\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1&10&13\\-2&1&4\\10&2&-10\\2a+5&1-a&-5a-2\end{bmatrix}$

$\longrightarrow \begin{bmatrix}1&10&13\\0&21&30\\0&-98&-140\\0&-21a-49&-31a-67\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1&10&13\\0&7&10\\0&0&7a-21\\0&0&0\end{bmatrix}$ となるので, $\operatorname{rank} {}^tA = 2\ (a=3),\ = 3\ (a \neq 3)$.

よって, g が単射にならないためには $\dim \operatorname{Ker} g = 3 - \operatorname{rank} {}^tA > 0$ であればよいので, 条件 $a=3$ を得る

このとき, $\dim \operatorname{Ker} g = 3-2 = 1$ で, ${}^tA$ の簡約行列は $\begin{bmatrix}1&0&-9/7\\0&1&10/7\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ となることから $\operatorname{Ker} g$ の基底として, $\left(\begin{bmatrix}9\\-10\\7\end{bmatrix}\right)$ をとることができる

【注】 $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} {}^tA$ という性質を利用すれば, ${}^tA$ を基本変形しなくとも, (3) より, g が単射でない条件として $a=3$ を得ることができる.

【それ以外の自習用の問題の解答例】

3 (1)　任意の $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$, 任意の $k \in \mathbb{R}$ に対し, $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} (x_1+y_1)+(x_2+y_2) \\ (x_1+y_1)+(x_3+y_3) \end{bmatrix}$
$= \begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ x_1+x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1+y_2 \\ y_1+y_3 \end{bmatrix} = f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) + f\left(\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}\right)$, $f\left(k\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} kx_1 \\ kx_2 \\ kx_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} kx_1+kx_2 \\ kx_1+kx_3 \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ x_1+x_3 \end{bmatrix}$
$= kf\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right)$ が成り立つので f は線形写像である.

(2)　$f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ となるので, f は線形写像ではない.

(3)　$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 3$, $f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = 12 \neq 2f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ より, f は線形写像ではない.

(4)　任意の $p(t), q(t) \in \mathbb{R}[t]_3$, 任意の $k \in \mathbb{R}$ に対し, $f(p(t)+q(t)) = p'(t)+q'(t) = f(p(t))+f(q(t))$,
$f(kp(t)) = kp'(t) = kf(p(t))$ が成り立つので f は線形写像である.

4 (ii)　$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

(1) $\mathrm{Ker}(f)$ は、$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ であるようなベクトル $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ 全体の成す $\mathbb{R}^3$ の部分空間, すなわち, 連立一次方程式 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ の解全体の成す部分空間（解空間）である．A の簡約行列は $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ なので, その解は, 任意の値をとるパラメータ c を用いて, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ と表される．よって, $\mathrm{Ker}(f) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$ であるので, $\mathrm{Ker}(f)$ の基底として $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ を選ぶことができて, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$ である.

(2) $\mathrm{Im}(f)$ は, ベクトル $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = x_1\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 全体の成す $\mathbb{R}^2$ の部分空間である．x_1, x_2, x_3 は任意の値をとることから, $\mathrm{Im}(f) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ となるため, $\mathrm{Im}(f)$ の基底は, この 3 つのベクトルの中から一次独立な最大個数の組を選べばよい．ここで, この 3 つのベクトルを列に並べた行列は A に他ならず, A の簡約行列の主成分は 1 列と 3 列にあるので, 3 つのベクトルから 1 番目と 3 番目を選んだ組, すなわち $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ を $\mathrm{Im}(f)$ の基底として選ぶことができて, $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$ となる.

(3) 一般に, 線形写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ に対し, f が 1 対 1 写像 $\iff \mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\} \iff \dim(\mathrm{Ker}(\mathbf{f})) = \mathbf{0}$ であることと, f が上への写像 $\iff \mathrm{Im}(f) = f : (\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^m \iff \dim(\mathrm{Im}(f)) = m$ である．よって, f は上への写像だが, 1 対 1 写像ではない.

(iv) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix}$. (1) (ii) と同様に, A の簡約行列は $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ となるので, 連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解は, 任意の値をとるパラメータ c を用いて, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ と表される．よって, $\mathrm{Ker}(f) = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ であるので, $\mathrm{Ker}(f)$ の基底として $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ を選ぶことができて, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$ である.

(2) $\mathrm{Im}(f) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} \right\rangle$ であり, A の簡約行列の主成分が 1 列目と 2 列目にあることから, $\mathrm{Im}(f)$ の基底として $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$ を選ぶことができる．よって, $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$ となる.

(3) f は 1 対 1 写像でも上への写像でもない.

(v) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$. (1) A の簡約行列は $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ なので, 連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解は, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ のみ, すなわち, $\mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$ で, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$ である.

(2) $\mathrm{Im}(f) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} \right\rangle$ で, A の簡約行列の主成分がすべての列にあることから, $\mathrm{Im}(f)$ の基底として $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$ を選ぶことができる. よって, $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$ となる.

(もしくは, $\mathrm{Im}(f)$ が $\mathbb{R}^3$ と一致することから, $\mathrm{Im}(f)$ の基底として, $\mathbb{R}^3$ の標準基底を選んでもよい)

(3) f は 1 対 1 写像かつ上への写像 (全単写) である.

$\boxed{5}$ $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ とおくと,

$$D(p(t)) = 2(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3) - (t+1)(a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2) = (2a_0 - a_1) + (a_1 - 2a_2)t - 3a_3 t^2 - a_3 t^3$$

となるので, $\mathrm{Ker}(f) \ni p(t)$ となるためには, $D(p(t)) = 0$ すなわち, $2a_0 - a_1 = 0$, $a_1 - 2a_2 = 0$, $a_3 = 0$ を満たす必要がある.

この連立一次方程式を解いて, $a_0 = c$, $a_1 = 2c$, $a_2 = c$, $a_3 = 0$ (c は任意), すなわち $p(x) = c(1 + 2t + t^2)$ を得る. よって, $\mathrm{Ker}(D)$ の基底として, $\{1 + 2t + x^t\}$ を選ぶことができて, $\dim(\mathrm{Ker}(D)) = 1$.

$\mathbb{R}[x]_3$ の基底として, $\{1, t, t^2, t^3\}$ をとると, $D(1) = 2$, $D(t) = -1 + t$, $D(t^2) = -2t$, $D(t^3) = -3t^2 - t^3$ であることから, $\mathrm{Im}(D) = \langle 2, -1 + t, -2t, -3t^2 - t^3 \rangle$. ここで, $-2t = -1 \times 2 - 2 \times (-1 + t)$ であることから, $\mathrm{Im}(D)$ の基底として, $\{2, -1 + t, -3t^2 - t^3\}$ をとることができて, $\dim(\mathrm{Im}(D)) = 3$.