数学演習第二（演習第 10 回）

微積：重積分 [1]（重積分の定義，累次積分）

2021 年 1 月 6 日 実施

- 小テストの問題は $\boxed{1}$ の 4 問です．レポート課題は $\boxed{2}$ の 4 問です．
- それ以外の問題は自習用問題です（こちらも是非解いてください）．
- 要点もよく読むこと．また，問題を解く際には積分領域をかならず図示してみること．
- レポート課題の答案には答えだけでなく途中の計算も書いてください．

【要点】

- **累次積分の定義（微積教科書 pp. 109–110）**
  - $D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b,\, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$ の場合（x に関して単純な領域の場合）
    まず，x を固定して，$f(x, y)$ を y に関して $\varphi_1(x)$ から $\varphi_2(x)$ まで積分する：
    $$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \quad \cdots \quad (*)$$
    さらに，$(*)$ を x に関して a から b まで積分したものを $\displaystyle\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy$ と表す．
  - $D = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d,\, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$ の場合（y に関して単純な領域の場合）
    x に関して単純な領域の場合と同様に，まず $f(x, y)$ を x に関して $\psi_1(y)$ から $\psi_2(y)$ まで積分し，つぎに y に関して c から d まで積分したものを $\displaystyle\int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dy$ と表す．
  - $\displaystyle\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy$ と $\displaystyle\int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dy$ をまとめて **累次積分** という．

- **累次積分と 2 重積分の関係（微積教科書 pp. 111–112）**
  - D が（x または y に関して）単純な領域の場合には累次積分と 2 重積分の値は一致する．すなわち，D が x に関して単純な領域の場合には
    $$\iint_D f(x, y)\, dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \quad \cdots \quad (\text{あ})$$
    となり，D が y に関して単純な領域の場合には
    $$\iint_D f(x, y)\, dxdy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dx \quad \cdots \quad (\text{い})$$
    となる．ただし，$f(x, y)$, φ_1, $\varphi_2(x)$, $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$ は連続関数とする．
  - 例 1（微積教科書 p. 115, 2（3））
    $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1,\, x \geq 0\}$ のとき $\displaystyle\iint_D x\, dxdy$ を求める．D を x に関して単純な領域の形で表すと，$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1,\, -\sqrt{1 - x^2} \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\}$ となるので，
    $$\iint_D x\, dxdy = \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x\, dy = \int_0^1 x \cdot 2\sqrt{1 - x^2}\, dx = -\frac{2}{3} \int_0^1 \left\{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}\right\}'\, dx = \frac{2}{3}$$

を得る．また，$D = \{(x, y) \mid -1 \leq y \leq 1,\ 0 \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\}$ のように，y に関して単純な領域の形でも表すことができるので，

$$\iint_D x\,dxdy = \int_{-1}^{1} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} x\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{1-y^2}{2}\,dy = \int_0^1 (1-y^2)\,dy = \frac{2}{3}$$

と計算してもよい．

– 例 2（微積教科書 p. 115, 2（7））

3 変数関数 $f(x, y, z)$ の場合にも同様に累次積分を定義することができ，それを利用して 3 重積分を計算することができる．例えば，$D = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1-x,\ 0 \leq z \leq 1-x-y\}$ のとき $\iiint_D z\,dxdydz$ を計算してみると，

$$\begin{aligned}\iiint_D z\,dxdydz &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} z\,dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{(1-x-y)^2}{2} dy \\ &= \int_0^1 \frac{(1-x)^3}{6}\,dx = \frac{1}{24}\end{aligned}$$

となる．

- **累次積分の積分順序の交換（微積教科書 p. 113）**

– 例 3（微積教科書 p. 115, 3（1））

累次積分 $\displaystyle\int_{-1}^{1} dx \int_0^{2\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy$ の積分順序を交換する．すなわち，先に y で積分して後に x で積分しているところを，先に x で積分して後に y で積分する形に書きかえる．$D = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2\sqrt{1-x^2}\}$ とおくと，累次積分と 2 重積分の関係（あ）より，

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_0^{2\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy$$

が成り立つ．一方，D は $D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 2,\ -\sqrt{1-(y^2/4)} \leq x \leq \sqrt{1-(y^2/4)}\}$ とも表されるので，累次積分と 2 重積分の関係（い）より，

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy = \int_0^2 dy \int_{-\sqrt{1-(y^2/4)}}^{\sqrt{1-(y^2/4)}} f(x, y)\,dx$$

が成り立つ．以上より，

$$\int_{-1}^{1} dx \int_0^{2\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy = \int_0^2 dy \int_{-\sqrt{1-(y^2/4)}}^{\sqrt{1-(y^2/4)}} f(x, y)\,dx$$

となり，積分順序を交換することができた．

– 例 4（微積教科書 p. 115, 3（2））

累次積分 $\displaystyle\int_{-2}^{1} dx \int_{x^2}^{-x+2} f(x, y)\,dy$ の積分順序を交換する．$D = \{(x, y) \mid -2 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq -x+2\}$ とおく．D を y に関して単純な領域の形で表すと，つぎの 2 つの領域に分割される．

$$\begin{aligned}D_1 &= \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1,\ -\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y}\}, \\ D_2 &= \{(x, y) \mid 1 \leq y \leq 4,\ -\sqrt{y} \leq x \leq 2-y\}.\end{aligned}$$

よって，

$$\int_{-2}^{1} dx \int_{x^2}^{-x+2} f(x,y)\,dy = \iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dxdy$$
$$= \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx + \int_1^4 dy \int_{-\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)\,dx$$

となる．

- **空間図形の体積（微積教科書 p. 129）**
  - 空間図形 V の体積を求めるには，V を平面 $x=t$ で切ったときの断面積 $S(t)$ を t について積分すればよい．ただし，t は断面が空集合にならない範囲を動く．
  - 例 5

    xyz 空間内において，原点中心，半径 $r>0$ の球面で囲まれた部分を V とし，V の体積 $v(V)$ を求める．V を平面 $x=t$ で切ったときの断面は円：$y^2+z^2=r^2-t^2$ なので，断面積 $S(t)$ は $S(t)=\pi(r^2-t^2)$ となる．また，t の動く範囲は $-r \leq t \leq r$ である．よって，

    $$v(V) = \int_{-r}^{r} S(t)\,dt = 2\pi \int_0^r (r^2-t^2)\,dt = \frac{4}{3}\pi r^3$$

    を得る．**【注】**断面積を求める際には平面 $y=t$ や平面 $z=t$ で切ってもよい．計算しやすいものを選択すること．ただし，一般に，切り方を変えると断面積 $S(t)$ や t の動く範囲も変わるので注意すること．

【小テスト：オンライン受験】

$\boxed{1}$ $p,q,r>0$ に対して，$D=\{(x,y)\mid x\geq 0,\ x^{1/p}+|y|^{1/q}\leq r\}$，$I=\iint_D f(x,y)\,dxdy$ とする．

(1) $I=\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$ と表したとき，つぎの **(ア)** から **(エ)** の中から正しいものを すべて選べ．

(ア) $a=0$　**(イ)** $b=r$　**(ウ)** $\varphi_1(x)=0$　**(エ)** $\varphi_2(x)=(r-x^{1/p})^q$

(2) $I=\int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx$ と表したとき，つぎの **(ア)** から **(エ)** の中から正しいものを すべて選べ．

(ア) $c=-r^q$　**(イ)** $d=r^p$　**(ウ)** $\psi_1(y)=0$　**(エ)** $\psi_2(y)=(r-|y|^{1/q})^p$

(3) $p=q=r=2$ かつ $f(x,y)=x$ のとき，I の値をつぎの **(ア)** から **(エ)** の中から選べ．

(ア) $\dfrac{2^5}{15}$　**(イ)** $\dfrac{2^6}{15}$　**(ウ)** $\dfrac{2^7}{15}$　**(エ)** $\dfrac{2^8}{15}$

(4) $p=q=r$ かつ $f(x,y)=(p-|y|^{1/p})^p$ のとき，I の値をつぎの **(ア)** から **(エ)** の中から選べ．ただし，$B(s,t)$ はベータ関数とする（すなわち，$s,t>0$ に対して $B(s,t)=\int_0^1 u^{s-1}(1-u)^{t-1}\,du$）．

(ア) $2p^{2p+1}B(p,2p)$　**(イ)** $2p^{3p+1}B(p,2p)$
(ウ) $2p^{2p+1}B(p,2p+1)$　**(エ)** $2p^{3p+1}B(p,2p+1)$

【レポート課題：オンライン提出】

$\boxed{2}$ 以下の設問に答えよ．

(1) $I = \displaystyle\int_{-1}^{3} dx \int_{x^2-4}^{-x^2+4x+2} f(x,y)\,dy$ の積分順序を交換せよ．

(2) $J = \displaystyle\iint_D \max(x^2, y)\,dxdy$，$D = [0,1] \times [0,1]$ の値を求めよ．ただし，$\max(a,b) = \begin{cases} a & (a \geq b), \\ b & (a < b). \end{cases}$

(3) 空間図形 $V : x \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq |y|$ を平面 $x = t$ で切ったときの断面積 $S(t)$ を求めよ．

(4) (3) の V の体積 $v(V)$ を求めよ．

【自習用問題】

$\boxed{3}$ つぎの 2 重積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D x^2 y\,dxdy$，$D : y \leq x \leq 2y, y \leq 1$　（演習書：問題 6.1.2（1）改題）

(2) $\displaystyle\iint_D \cos(x+y)\,dxdy$，$D : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq \dfrac{\pi}{2}$　（演習書：問題 6.1.2（4））

(3) $\displaystyle\iint_D (x+y)\,dxdy$，$D : x \geq 0, y \leq 2, \sqrt{x} \leq y$　（演習書：問題 6.1.2（5））

$\boxed{4}$ つぎの累次積分の積分順序を交換せよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 dx \int_{x^2}^{2-x} f(x,y)\,dy$　（演習書：問題 6.1.3（1））

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} dy \int_0^{1+\cos y} f(x,y)\,dx$　（演習書：問題 6.1.3（6））

$\boxed{5}$ つぎの 2 重積分および累次積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D \sin\frac{y}{x}\,dxdy$，$D : 0 \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}x, \dfrac{1}{2} \leq x \leq 1$　（演習書：問題 6.1.4（3））

(2) $\displaystyle\int_0^1 dy \int_y^1 e^{x^2}\,dx$

$\boxed{6}$ 空間図形 $V : x^2 + z^2 \leq 1, y^2 + z^2 \leq 1$ の体積 $v(V)$ を求めよ．