数学演習第二（演習第 10 回）

微積：重積分 [1]（重積分の定義，累次積分）の解答例

2021 年 1 月 6 日 実施分

- $\boxed{2}$ (1)，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$，$\boxed{5}$ の問題の積分領域の図（手書き）は別紙にまとめるので，適宜参照すること．

【小テストの解答例】

$\boxed{1}$ 小テスト

$p, q, r > 0$ に対して，$D = \{(x,y) \mid x \geq 0,\ x^{1/p} + |y|^{1/q} \leq r\}$，$I = \displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy$ とする．このとき，

$$I = \int_0^{r^p} dx \int_{-(r-x^{1/p})^q}^{(r-x^{1/p})^q} f(x,y)\,dy = \int_{-r^q}^{r^q} dy \int_0^{(r-|y|^{1/q})^p} f(x,y)\,dx. \quad \cdots \quad (*)$$

(1) $(*)$ より <u>答えは **（ア）**，**（エ）**</u>．

(2) $(*)$ より <u>答えは **（ア）**，**（ウ）**，**（エ）**</u>．

(3) $p = q = r = 2$ かつ $f(x,y) = x$ のとき，$(*)$ より，

$$I = \int_0^{2^2} dx \int_{-(2-\sqrt{x})^2}^{(2-\sqrt{x})^2} x\,dy = 2\int_0^{2^2} x(2-\sqrt{x})^2\,dx = \frac{2^6}{15}$$

となる．よって，<u>答えは **（イ）**</u>．

(4) $p = q = r$ かつ $f(x,y) = (p - |y|^{1/p})^p$ のとき，$(*)$ より，

$$\begin{aligned} I &= \int_{-p^p}^{p^p} dy \int_0^{(p-|y|^{1/p})^p} (p-|y|^{1/p})^p\,dx = \int_{-p^p}^{p^p} (p-|y|^{1/p})^{2p}\,dy = 2\int_0^{p^p} (p-y^{1/p})^{2p}\,dy \\ &\underbrace{=}_{y=p^p t^p} 2\int_0^1 (p-pt)^{2p} p^{p+1} t^{p-1}\,dt = 2p^{3p+1}\int_0^1 (1-t)^{2p} t^{p-1}\,dt = 2p^{3p+1} B(p, 2p+1) \end{aligned}$$

となる．よって，<u>答えは **（エ）**</u>．

【レポート課題の解答例】

$\boxed{2}$ レポート課題

(1) $\boxed{I = \displaystyle\int_{-4}^{-3} dy \int_{-\sqrt{4+y}}^{\sqrt{4+y}} f(x,y)\,dx + \int_{-3}^{5} dy \int_{2-\sqrt{6-y}}^{\sqrt{4+y}} f(x,y)\,dx + \int_5^6 dy \int_{2-\sqrt{6-y}}^{2+\sqrt{6-y}} f(x,y)\,dx}$ となる．

(2) $D = [0,1] \times [0,1]$ はつぎの D_1 と D_2 に分割される．

$$D_1 = \{(x,y) \mid 0 \leq x, y \leq 1,\ y \geq x^2\}, \quad D_2 = \{(x,y) \mid 0 \leq x, y \leq 1,\ y \leq x^2\}.$$

よって，$J = \displaystyle\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} y\,dx + \int_0^1 dx \int_0^{x^2} x^2\,dy = \int_0^1 y^{\frac{3}{2}}\,dy + \int_0^1 x^4\,dx = \boxed{\frac{3}{5}}$.

(3) $\boxed{S(t) = 1 - t^2}$ となる．

(4) t は $0 \leq t \leq 1$ を動くので，$v(V) = \displaystyle\int_0^1 S(t)\,dt = \int_0^1 (1-t^2)\,dt = \boxed{\frac{2}{3}}$ となる．

【自習用問題の解答例】

$\boxed{3}$ 2 重積分の値を求める問題

(1) (i) y に関して単純な領域 $D = \{(x, y) \mid 0 \le y \le 1,\ y \le x \le 2y\}$ とみなす場合.

$$\iint_D x^2 y\, dxdy = \int_0^1 dy \int_y^{2y} x^2 y\, dx = \int_0^1 y \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{x=y}^{x=2y} dy = \int_0^1 \frac{7}{3} y^4\, dy = \frac{7}{3}\left[\frac{1}{5}y^5\right]_0^1 = \boxed{\frac{7}{15}}.$$

(ii) x に関して単純な領域とみなす場合．この場合，D はつぎの D_1 と D_2 に分割される．

$$D_1 = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1,\ \frac{1}{2}x \le y \le x\}, \quad D_2 = \{(x, y) \mid 1 \le x \le 2,\ \frac{1}{2}x \le y \le 1\}.$$

よって，

$$\begin{aligned}\iint_D x^2 y\, dxdy &= \int_0^1 dx \int_{\frac{1}{2}x}^{x} x^2 y\, dy + \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{2}x}^{1} x^2 y\, dy \\ &= \int_0^1 x^2 \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{y=\frac{1}{2}x}^{y=x} dx + \int_1^2 x^2 \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{y=\frac{1}{2}x}^{y=1} dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{8}x^4\right) dx + \int_1^2 \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4\right) dx = \left[\frac{3}{40}x^5\right]_0^1 + \left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5\right]_1^2 = \boxed{\frac{7}{15}}.\end{aligned}$$

(2) $D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2} - x\}$ として，

$$\begin{aligned}\iint_D \cos(x + y)\, dxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\frac{\pi}{2} - x} \cos(x + y)\, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sin(x + y)\right]_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2} - x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin x\right) dx = \left[x + \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{\frac{\pi}{2} - 1}.\end{aligned}$$

(3) $D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 4,\ \sqrt{x} \le y \le 2\}$ として，

$$\begin{aligned}\iint_D (x + y)\, dxdy &= \int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^2 (x + y)\, dy = \int_0^4 \left[xy + \frac{1}{2}y^2\right]_{y=\sqrt{x}}^{y=2} dx \\ &= \int_0^4 \left(2x + 2 - x\sqrt{x} - \frac{1}{2}x\right) dx \\ &= \int_0^4 \left(\frac{3}{2}x + 2 - x^{\frac{3}{2}}\right) dx = \left[\frac{3}{4}x^2 + 2x - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^4 = \boxed{\frac{36}{5}}.\end{aligned}$$

$\boxed{4}$ 累次積分の積分順序を交換する問題

(1) $D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le 2 - x\}$ とおくと $\iint_D f(x, y)\, dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{2-x} f(x, y)\, dy$ となる．D を y に関して単純な領域とみなすと，つぎの D_1 と D_2 に分割される．

$$D_1 = \{(x, y) \mid 0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le \sqrt{y}\}, \quad D_2 = \{(x, y) \mid 1 \le y \le 2,\ 0 \le x \le 2 - y\}.$$

よって，

$$\begin{aligned}\int_0^1 dx \int_{x^2}^{2-x} f(x, y)\, dy &= \iint_D f(x, y)\, dxdy = \iint_{D_1} f(x, y)\, dxdy + \iint_{D_2} f(x, y)\, dxdy \\ &= \boxed{\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y)\, dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f(x, y)\, dx}.\end{aligned}$$

(2) $D=\{(x,y)\mid 0\leq y\leq \pi,\ 0\leq x\leq 1+\cos y\}$ とおくと，$\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_0^{\pi}dy\int_0^{1+\cos y}f(x,y)\,dx$ となる．x に関して単純な領域とみなすと $D=\{(x,y)\mid 0\leq x\leq 2,\ 0\leq y\leq \mathrm{Cos}^{-1}(x-1)\}$ なので，

$$\int_0^{\pi}dy\int_0^{1+\cos y}f(x,y)\,dx=\boxed{\int_0^2 dx\int_0^{\mathrm{Cos}^{-1}(x-1)}f(x,y)\,dy}.$$

5 2 重積分の値を求める問題

(1) $\displaystyle\iint_D \sin\left(\frac{y}{x}\right)dxdy=\int_{\frac{1}{2}}^1 dx\int_0^{\frac{\pi}{2}x}\sin\left(\frac{y}{x}\right)dy=\int_{\frac{1}{2}}^1\left[-x\cos\left(\frac{y}{x}\right)\right]_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}x}dx=\int_{\frac{1}{2}}^1 x\,dx=\boxed{\frac{3}{8}}.$

(2) そのまま積分するのは難しいので積分順序を交換する．

$$\int_0^1 dy\int_y^1 e^{x^2}dx=\int_0^1 dx\int_0^x e^{x^2}dy=\int_0^1 xe^{x^2}dx=\int_0^1\left(\frac{1}{2}e^{x^2}\right)'dx=\left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1=\boxed{\frac{1}{2}(e-1)}.$$

6 空間図形の体積を求める問題

切断面	t の範囲	切断面の式	断面積
平面 $x=t$	$-1\leq t\leq 1$	$\lvert y\rvert\leq\sqrt{1-t^2},\ y^2+z^2\leq 1$	$\mathrm{Cos}^{-1}\lvert t\rvert+2\lvert t\rvert\sqrt{1-t^2}$
平面 $y=t$	$-1\leq t\leq 1$	$\lvert x\rvert\leq\sqrt{1-t^2},\ x^2+z^2\leq 1$	$\mathrm{Cos}^{-1}\lvert t\rvert+2\lvert t\rvert\sqrt{1-t^2}$
平面 $z=t$	$-1\leq t\leq 1$	$\lvert x\rvert\leq\sqrt{1-t^2},\ \lvert y\rvert\leq\sqrt{1-t^2}$	$4(1-t^2)$

よって，

$$v(V)=\int_{-1}^1 4\left(1-t^2\right)dt=4\cdot 2\int_0^1(1-t^2)\,dt=8\left[t-\frac{1}{3}t^3\right]_0^1=\boxed{\frac{16}{3}}.$$