数学演習第二 (第 11 回) 【解答例】

線形：線形写像の表現行列，表現行列と座標，基底変換行列　2021 年 1 月 13 日

【小テストの解答例】

$\boxed{\mathbf{1}}$

(1) $\mathcal{E}_2 = \left(\boldsymbol{e}'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}'_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ に対して $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ であるから，

$$(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2) = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

となる．　答：(ウ)

(2) $\mathcal{E}_2 = \left(\boldsymbol{e}'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}'_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ に対して $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ であるから，

$$(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

となる．　答：(イ)

(3) $\mathcal{E}_3 = \left(\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ に対して

$$(f(\boldsymbol{a}_1), f(\boldsymbol{a}_2)) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

となるから，求める表現行列は $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ である．　答：(ア)

(4) $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$，$(f(\boldsymbol{a}_1), f(\boldsymbol{a}_2)) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ であるから，$\mathcal{B}, \mathcal{E}_3$ に関する f の表現行列は

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

である．よって，$[f(\boldsymbol{x})]_{\mathcal{E}_3} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} [\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -a \\ a+3b \\ 3a+6b \end{bmatrix}$ となる．　答：(エ)

【レポート課題の解答例】

$\boxed{\mathbf{2}}$

(1) $[\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_2 \quad \boldsymbol{b}_1 \quad \boldsymbol{b}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

よって，求める基底変換行列は $\boxed{\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}$ である.

(2) $[\boldsymbol{b}_1 \quad \boldsymbol{b}_2 \quad f(\boldsymbol{e}_1) \quad f(\boldsymbol{e}_2) \quad f(\boldsymbol{e}_3)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

となるから，$(f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2), f(\boldsymbol{e}_3)) = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$. よって，求める表現行列は $\boxed{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}}$ である.

(3) $\Big[[\boldsymbol{f}_1]_{\mathcal{F}} \quad [\boldsymbol{f}_2]_{\mathcal{F}} \quad [\boldsymbol{f}_3]_{\mathcal{F}}\Big] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ に注意すると，

$$\Big[[h(\boldsymbol{f}_1)]_{\mathcal{G}} \quad [h(\boldsymbol{f}_2)]_{\mathcal{G}} \quad [h(\boldsymbol{f}_3)]_{\mathcal{G}}\Big] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \Big[[\boldsymbol{f}_1]_{\mathcal{F}} \quad [\boldsymbol{f}_2]_{\mathcal{F}} \quad [\boldsymbol{f}_3]_{\mathcal{F}}\Big] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

また，$\mathcal{E}_2$ から $\mathcal{G}$ への基底変換行列は $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ だから，

$$\begin{aligned} \Big[[h(\boldsymbol{f}_1)]_{\mathcal{E}_2} \quad [h(\boldsymbol{f}_2)]_{\mathcal{E}_2} \quad [h(\boldsymbol{f}_3)]_{\mathcal{E}_2}\Big] &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \Big[[h(\boldsymbol{f}_1)]_{\mathcal{G}} \quad [h(\boldsymbol{f}_2)]_{\mathcal{G}} \quad [h(\boldsymbol{f}_3)]_{\mathcal{G}}\Big] \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 7 & 14 & 21 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

よって，$\boxed{[h(\boldsymbol{f}_1)]_{\mathcal{E}_2} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix},\ [h(\boldsymbol{f}_2)]_{\mathcal{E}_2} = \begin{bmatrix} 10 \\ 14 \end{bmatrix},\ [h(\boldsymbol{f}_3)]_{\mathcal{E}_2} = \begin{bmatrix} 15 \\ 21 \end{bmatrix}}$ である.

(4) (3) より $(h(\boldsymbol{f}_1), h(\boldsymbol{f}_2), h(\boldsymbol{f}_3)) = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2) \begin{bmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 7 & 14 & 21 \end{bmatrix}$ であり，$\mathcal{F}$ から $\mathcal{E}_3$ への基底変換行列は $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ だから，求める表現行列は

$$\begin{bmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 7 & 14 & 21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} -25 & 35 & 40 \\ -35 & 49 & 56 \end{bmatrix}}.$$

【それ以外の自習用問題の解答例】

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\mathcal{E}$ から $\mathcal{A}$ への基底変換行列を P とすると，$P = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$．よって，$\mathcal{A}$ から $\mathcal{E}$ への基底変換行列は $P^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$．

(2) (i) 求める表現行列は，$P^{-1} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$．

(ii) (i) の結果を見るのが早い．$\dim \operatorname{Ker} f = 1$ であり，核に属する非自明な元の一つとして $\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_3$ がとれるから，$(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_3)$ が $\operatorname{Ker} f$ の基底の一例となる．また $\dim \operatorname{Im} f = 2$ で，その基底の一例として $(f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2)) = (\boldsymbol{v}_1, 2\boldsymbol{v}_2) = (3\boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_3, 2\boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2)$ がとれる．

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $L(1) = 2, L(x) = x - 1, L(x^2) = -2x$ より，表現行列は $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$．

(2) A を簡約化すると $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$．$\dim N(A) = 1$ で基底として $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ が取れ，$\dim C(A) = 2$ で基底として，$\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ が取れる．これを $\mathbb{R}[x]_2$ の元に直せば，$\dim \operatorname{Ker} L = 1$ で基底として $(1 + 2x + x^2)$ が取れ，$\dim \operatorname{Im} L = 2$ で基底として $(2, x - 1)$ が取れる．（あるいはもっと簡単に $(1, x)$ ととっても良い．）

(3) $L(1 + x) = 1 + x, L(x + x^2) = -(1 + x), L(x^2) = -2(x + x^2) + 2x^2$ より，$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$．

$\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ への基底変換行列 $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ を用いて，$P^{-1}AP$ と求めてもよい．

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} - (c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2) = \begin{bmatrix} x - 2c_2 \\ y - (c_1 + c_2) \\ z - 2c_1 \end{bmatrix}$ より, $(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{a}_1) = y + 2z - 5c_1 - c_2 = 0$, $(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{a}_2) = 2x + y - c_1 - 5c_2 = 0$ となる．これより, $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y + 2z \\ 2x + y \end{bmatrix}$ となるので,
$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y + 2z \\ 2x + y \end{bmatrix} = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y + 2z \\ 2x + y \end{bmatrix} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} -x + 2y + 5z \\ 5x + 2y - z \end{bmatrix}$.

(2) (1) より $[g(\boldsymbol{e}_1)]_{\mathcal{A}} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$, $[g(\boldsymbol{e}_2)]_{\mathcal{A}} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $[g(\boldsymbol{e}_3)]_{\mathcal{A}} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$ となるので, g の $(\mathcal{E}_3, \mathcal{A})$ に関する表現行列は, $\frac{1}{12} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.