数学演習第二（演習第 12 回）

微積：重積分 [2]（重積分の変数変換）

2021 年 1 月 20 日

- 小テストの問題は $\boxed{1}$ の 4 問です．レポート課題は $\boxed{2}$ の 4 問です．
- それ以外の問題は自習用問題です（こちらも是非解いてください）．
- 要点もよく読むこと．レポート課題の答案には答えだけでなく途中の計算も書いてください．

【要点】

- **2 重積分の変数変換（微積教科書 pp. 116–117）**
  - u,v の関数 $x = x(u,v), y = y(u,v)$ に対して，$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix} = x_u y_v - x_v y_u$ を **ヤコビアン** という．
  - **【例 1】** $x(u,v) = u^2 + v,\ y(u,v) = u + v^2$ のとき，$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{bmatrix} 2u & 1 \\ 1 & 2v \end{bmatrix} = 4uv - 1$ となる．
  - 写像 $\Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ は，uv 平面の領域 E を xy 平面の領域 D の上に 1 対 1 に写すとする．さらに，$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0\ ((u,v) \in E)$ とする．このとき，
$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_E f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv \quad \cdots \quad (*)$$
    が成り立つ．ただし，$\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ はヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ の絶対値を表す．
  - E と D の対応が 1 対 1 でなくても，またヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ が 0 となる点があっても，そのような点の集合の面積が 0（たとえば連続曲線とか有限個の点）であるならば，$(*)$ は成り立つ．
- **3 重積分の変数変換**

  2 重積分の場合と同様に，
$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_E f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| dudvdw$$
  が成り立つ．ただし，$\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$ は 3 次元の場合のヤコビアンである．すなわち，
$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \det\begin{bmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{bmatrix}.$$

【小テスト：オンライン受験】

$\boxed{1}$ I と J を次で定める．

$$I = \iint_D (x^2 - y^2)^4\,dxdy, \quad D : |x+y| \leq 1,\ |x-y| \leq 1,$$
$$J = \iiint_V z^2\,dxdydz, \quad V : x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} \leq 9,\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 0.$$

このとき，以下の設問に答えよ．

(1) $u = x + y,\ v = x - y$ とする． $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ の値として正しいものを次の **（ア）** から **（エ）** の中から選べ．

（ア） -1　**（イ）** $-\dfrac{1}{2}$　**（ウ）** $\dfrac{1}{2}$　**（エ）** 1

(2) I の値として正しいのもを次の **（ア）** から **（エ）** の中から選べ．

（ア） $-\dfrac{4}{25}$　**（イ）** $-\dfrac{2}{25}$　**（ウ）** $\dfrac{2}{25}$　**（エ）** $\dfrac{4}{25}$

(3) $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ z = 2w$ とする． $\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, w)}$ の値として正しいものを次の **（ア）** から **（エ）** の中から選べ．

（ア） $-2r$　**（イ）** $-\dfrac{r}{2}$　**（ウ）** $\dfrac{r}{2}$　**（エ）** $2r$

(4) J の値として正しいのもを次の **（ア）** から **（エ）** の中から選べ．

（ア） $\dfrac{2}{15}\pi\left(8^{\frac{5}{2}} - 5^{\frac{5}{2}}\right)$　**（イ）** $\dfrac{4}{15}\pi\left(8^{\frac{5}{2}} - 5^{\frac{5}{2}}\right)$　**（ウ）** $\dfrac{8}{15}\pi\left(8^{\frac{5}{2}} - 5^{\frac{5}{2}}\right)$　**（エ）** $\dfrac{16}{15}\pi\left(8^{\frac{5}{2}} - 5^{\frac{5}{2}}\right)$

【レポート課題：オンライン提出】

$\boxed{2}$ 以下の設問に答えよ．

(1) $D = \{(x, y) \mid |2x + 3y| \le 1,\ |3x + 2y| \le 1\}$ とする．2 重積分 $\displaystyle\iint_D |x - y|\, dxdy$ の値を求めよ．

(2) $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 4,\ x \ge 0\}$ とする．2 重積分 $\displaystyle\iint_D e^{x^2+y^2}\, dxdy$ の値を求めよ．

(3) 次の 3 重積分の値を求めよ．

$$\iiint_V e^z\, dxdydz, \quad V : 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4,\ x \ge 0,\ z \ge 0.$$

(4) 次の 3 重積分の値を求めよ．

$$\iiint_V z\, dxdydz, \quad V : 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}} \le z \le \sqrt{3(x^2 + y^2)}.$$

【自習用問題】

$\boxed{3}$ つぎの 2 重積分の値を求めよ．ただし，$a, b > 0$ とする．

(1) $I_1 = \displaystyle\iint_D \sqrt{xy}\, dxdy$， $D : x \ge 0,\ y \ge 0,\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} \le 1$　（演習書：問題 6.2.2（2））

(2) $I_2 = \iint_D xy\,dxdy$， $x \geq 0,\, y \geq 0,\, \sqrt{\dfrac{x}{a}} + \sqrt{\dfrac{y}{b}} \leq 1$　（演習書：問題 6.2.2（3）の一部）

$\boxed{4}$ つぎの 2 重積分の値を求めよ．ただし，$a, b > 0$ とする．

(1) $J_1 = \iint_D (x+y)^2\,dxdy$， $D : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1$　（演習書：問題 6.2.2（1）の類題）

(2) $J_2 = \iint_D \sqrt{\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}}\,dxdy$， $D : (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1,\, \dfrac{1}{\sqrt{3}}x \leq y \leq \sqrt{3}x$

$\boxed{5}$ つぎの部分の体積を求めよ．ただし，$a > 0$ とする．

(1) 円柱 $x^2 + y^2 \leq a^2$ の平面 $z = 0$ の上方にあり，平面 $z = x$ の下側にある部分．（演習書：問題 6.4.2 (5)）

(2) 円柱 $x^2 + y^2 \leq ax$ と 球 $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ の共通部分．

$\boxed{6}$ 次の 3 重積分の値を求めよ．ただし，p は実数とし，$0 < a < b$ とする．

$$K = \iiint_V \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{p}{2}}}, \quad V : a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2.$$