数学演習第二（演習第 12 回）

微積：重積分 [2]（重積分の変数変換）の解答例

2021 年 1 月 20 日 実施分

【小テストの解答例】

$\boxed{1}$ 小テスト

$$I=\iint_D (x^2-y^2)^4\,dxdy,\quad D: |x+y|\le 1,\, |x-y|\le 1,$$
$$J=\iiint_V z^2\,dxdydz,\quad V: x^2+y^2+4z^2\le 9,\, 1\le x^2+y^2\le 4,\, x\ge 0.$$

(1) $x=\dfrac{u+v}{2}$, $y=\dfrac{u-v}{2}$ なので，$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\det\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}=-\dfrac{1}{2}$ となる．よって，答えは（イ）.

(2) $I=\displaystyle\int_{-1}^{1}du\int_{-1}^{1}u^4v^4\left|-\frac{1}{2}\right|dv=2\int_0^1 u^4\,du\cdot\int_0^1 v^4\,dv=\frac{2}{25}$ となる．よって，答えは（ウ）.

(3) $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\det\begin{bmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta & 0\\ \sin\theta & r\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}=2r$ となる．よって，答えは（エ）.

(4) (r,θ,w) は $1\le r\le 2$, $-\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$, $-\sqrt{9-r^2}\le w\le\sqrt{9-r^2}$ を動くので，

$$J=\int_1^2 dr\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{-\sqrt{9-r^2}}^{\sqrt{9-r^2}}4w^2|2r|dw=16\pi\int_1^2 dr\int_0^{\sqrt{9-r^2}}w^2r\,dw=\frac{16}{3}\pi\int_1^2(9-r^2)^{\frac{3}{2}}r\,dr$$
$$=\frac{16}{3}\pi\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)\int_1^2\left\{(9-r^2)^{\frac{5}{2}}\right\}'\,dr=\frac{16}{15}\pi\left(8^{\frac{5}{2}}-5^{\frac{5}{2}}\right)$$

となる．よって，答えは（エ）.

【レポート課題の解答例】

$\boxed{2}$ レポート課題

(1) $u=2x+3y$, $v=3x+2y$ とおくと，$x=\dfrac{-2u+3v}{5}$, $y=\dfrac{3u-2v}{5}$ となる．このとき，

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\det\begin{bmatrix}-\frac{2}{5} & \frac{3}{5}\\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5}\end{bmatrix}=-\frac{1}{5}$$

となる．$E=\{(u,v)\mid |u|\le 1,\, |v|\le 1\}$ とおけば，E はつぎの E_1 と E_2 に分割される．

$$E_1=\{(u,v)\mid |u|\le 1,\, |v|\le 1,\, u\le v\},\quad E_2=\{(u,v)\mid |u|\le 1,\, |v|\le 1,\, u\ge v\}.$$

よって，$|x-y|=|u-v|$ に注意して，

$$\iint_D|x-y|\,dxdy=\iint_E|u-v|\left|-\frac{1}{5}\right|dudv=\frac{1}{5}\left\{\iint_{E_1}(v-u)\,dudv+\iint_{E_2}(u-v)\,dudv\right\}$$
$$=\frac{1}{5}\left\{\int_{-1}^1du\int_u^1(v-u)\,dv+\int_{-1}^1dv\int_v^1(u-v)\,du\right\}=\frac{1}{5}\left(\frac{4}{3}+\frac{4}{3}\right)=\boxed{\frac{8}{15}}.$$

(2) $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ とおくと，(r,θ) は $0\le r\le 2,\ -\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$ を動く．また，$\dfrac{(x,y)}{(r,\theta)}=r$ である．よって，

$$\iint_D e^{x^2+y^2}\,dxdy=\int_0^2 dr\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{r^2}|r|\,d\theta=\pi\int_0^2 re^{r^2}\,dr=\pi\cdot\frac{1}{2}\int_0^2 (e^{r^2})'\,dr=\boxed{\frac{1}{2}\pi\left(e^4-1\right)}.$$

(3) $x=r\sin\theta\cos\varphi,\ y=r\sin\theta\sin\varphi,\ z=r\cos\theta$ とおくと，(r,θ,φ) は

$$1\le r\le 2,\quad 0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\quad -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$$

を動く．また，$\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}=r^2\sin\theta$ である．よって，

$$\iiint_V e^z\,dxdydz=\int_1^2 dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{r\cos\theta}|r^2\sin\theta|\,d\varphi=\pi\int_1^2 dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d}{d\theta}\left(-re^{r\cos\theta}\right)\,d\theta$$

$$=\pi\int_1^2\left[-re^{r\cos\theta}\right]_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\,dr=\pi\int_1^2\left(-r+re^r\right)\,dr=\boxed{\pi\left(e^2-\frac{3}{2}\right)}.$$

(4) $x=r\sin\theta\cos\varphi,\ y=r\sin\theta\sin\varphi,\ z=r\cos\theta$ とおくと，(r,θ,φ) は

$$1\le r\le 2,\quad \frac{\pi}{6}\le\theta\le\frac{\pi}{3},\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$$

を動く．また，$\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}=r^2\sin\theta$ である．よって，

$$\iiint_V z\,dxdydz=\int_1^2 dr\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\cos\theta|r^2\sin\theta|\,d\varphi=\frac{\pi}{2}\int_1^2 r^3\,dr\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{15}{4}\cdot\frac{1}{4}=\boxed{\frac{15}{32}\pi}.$$

【自習用問題の解答例】

$\boxed{3}$ 変数変換を用いて 2 重積分を計算する問題

(1) $u=\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b},\ v=-\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}$ とおくと $x=\dfrac{a(u-v)}{2},\ y=\dfrac{b(u+v)}{2}$ となる．このとき，

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}x_u & x_v\\ y_u & y_v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a/2 & -a/2\\ b/2 & b/2\end{vmatrix}=\frac{ab}{2}$$

となる．また，(u,v) は $0\le u\le 1,\ -u\le v\le u$ を動く．よって，

$$I_1=\int_0^1 du\int_{-u}^{u}\sqrt{\frac{a(u-v)}{2}\cdot\frac{b(u+v)}{2}}\left|\frac{ab}{2}\right|\,dv=\frac{(ab)^{\frac{3}{2}}}{4}\int_0^1 du\int_{-u}^{u}\sqrt{u^2-v^2}\,dv$$

$$=\frac{(ab)^{\frac{3}{2}}}{2}\int_0^1 du\int_0^u\sqrt{u^2-v^2}\,dv$$

となる．いま，

$$\int_0^u\sqrt{u^2-v^2}\,dv\underbrace{=}_{v=u\sin\theta}\int_0^{\frac{\pi}{2}}u\sqrt{1-\sin^2\theta}\cdot u\cos\theta\,d\theta=u^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta=\frac{\pi}{4}u^2$$

なので，$I_1 = \dfrac{(ab)^{\frac{3}{2}}}{8}\pi \displaystyle\int_0^1 u^2\,du = \boxed{\dfrac{(ab)^{\frac{3}{2}}}{24}\pi}$.

(2) $u = \sqrt{\dfrac{x}{a}},\ v = \sqrt{\dfrac{y}{b}}$ とおくと $x = au^2,\ y = bv^2$ となる．このとき，$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 2au & 0 \\ 0 & 2bv \end{vmatrix} = 4abuv$ となる．また，(u,v) は $E = \{(u,v) \mid u \geq 0,\ v \geq 0,\ u+v \leq 1\}$ を動く．よって，

$$I_2 = \int_0^1 du \int_0^{1-u} abu^2v^2 \cdot |4abuv|\,dv = 4a^2b^2 \int_0^1 du \int_0^{1-u} u^3v^3\,dv = 4a^2b^2 \int_0^1 \frac{1}{4}u^3(1-u)^4\,du = \boxed{\frac{a^2b^2}{280}}.$$

4 極座標変換を用いて 2 重積分を計算する問題

(1) $x = ar\cos\theta,\ y = br\sin\theta$ とおくと $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & br\cos\theta \end{vmatrix} = abr$ となる．(r,θ) は $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ を動くので，

$$J_1 = \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} (ar\cos\theta + br\sin\theta)^2 abr\,d\theta = ab\int_0^1 r^3\,dr \int_0^{2\pi} (a^2\cos^2\theta + 2ab\cos\theta\sin\theta + b^2\sin^2\theta)\,d\theta$$
$$= \frac{ab}{8}\int_0^{2\pi} \{(a^2-b^2)\cos 2\theta + 2ab\sin 2\theta + a^2 + b^2\}\,d\theta = \boxed{\frac{ab(a^2+b^2)\pi}{4}}.$$

(2) $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とおくと $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$ となる．また，$\sqrt{\dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}} = \sqrt{\dfrac{2}{\sin 2\theta}}$ であり，(r,θ) は

$$\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}, \quad \cos\theta + \sin\theta - \sqrt{\sin 2\theta} \leq r \leq \cos\theta + \sin\theta + \sqrt{\sin 2\theta}$$

を動く．よって，

$$J_2 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\cos\theta+\sin\theta-\sqrt{\sin 2\theta}}^{\cos\theta+\sin\theta+\sqrt{\sin 2\theta}} \sqrt{\frac{2}{\sin 2\theta}} \cdot |r|\,dr = \sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin 2\theta}} \int_{\cos\theta+\sin\theta-\sqrt{\sin 2\theta}}^{\cos\theta+\sin\theta+\sqrt{\sin 2\theta}} r\,dr$$
$$= \sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}} \cdot 2\sqrt{\sin 2\theta}(\cos\theta + \sin\theta)\,d\theta = 2\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\cos\theta + \sin\theta)\,d\theta = \boxed{2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}.$$

5 空間図形の体積を求める問題

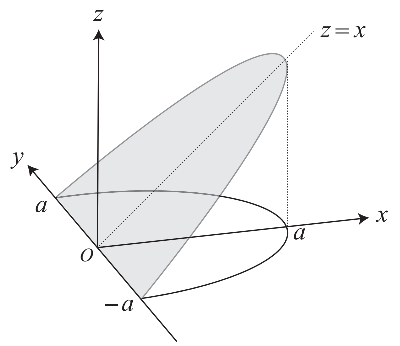

図 1　(1) の図形

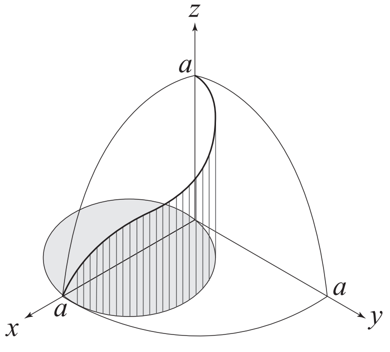

図 2　(2) の図形

(1) 求める体積を v_1 とおく．さらに，

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2,\, x \geq 0\}, \quad V = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D,\, 0 \leq z \leq x\}$$

とおく．すると，

$$\begin{aligned}
v_1 &= \iiint_V dxdydz = \iint_D dxdy \int_0^x dz = \iint_D x\, dxdy = \int_0^a dr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r\cos\theta \cdot r\, dr \\
&= \int_0^a r^2\, dr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta = \frac{a^3}{3} \cdot 2 = \boxed{\frac{2}{3}a^3}.
\end{aligned}$$

(2) 求める体積を v_2 とおく．$x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$ の部分を求めて 4 倍する．$x^2 + y^2 \leq ax \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}a\right)^2 + y^2 \leq \frac{a^2}{4}$ に注意して，

$$\begin{aligned}
D &= \left\{(x, y) \mid \left(x - \frac{1}{2}a\right)^2 + y^2 \leq \frac{a^2}{4},\, x \geq 0,\, y \geq 0\right\}, \\
V &= \left\{(x, y, z) \mid (x, y) \in D,\, 0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\right\},
\end{aligned}$$

とおく．すると，

$$\frac{v_2}{4} = \iiint_V dxdydz = \iint_D dxdy \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dz = \iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dxdy$$

となる．さらに，$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とすると $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = r$ であり，(r, θ) は $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$，$0 \leq r \leq a\cos\theta$ を動くので，

$$\begin{aligned}
\frac{v_2}{4} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} \sqrt{a^2 - r^2} \cdot r\, dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} \frac{d}{dr}\left\{\frac{(a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}}{-3}\right\} dr = \frac{a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3\theta)\, d\theta \\
&= \frac{a^3}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right)
\end{aligned}$$

となる．よって，$\boxed{v_2 = \dfrac{4a^3}{3}\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{2}{3}\right)}$．

$\boxed{6}$ 3 重積分を計算する問題

$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta$ とおくと，

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = \det\begin{bmatrix} x_r & x_\theta & x_\varphi \\ y_r & y_\theta & y_\varphi \\ z_r & z_\theta & z_\varphi \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{bmatrix} = r^2\sin\theta$$

となる．また，(r, θ, φ) は $W = \{(r, \theta, \varphi) \mid a \leq r \leq b,\, 0 \leq \theta \leq \pi,\, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ を動く．よって，

$$\begin{aligned}
K &= \iiint_W \frac{1}{r^p} \cdot r^2 \sin\theta\, drd\theta d\varphi = \left(\int_a^b \frac{dr}{r^{p-2}}\right)\left(\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta\right)\left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right) \\
&= \begin{cases} \boxed{\dfrac{4\pi}{p-3}\left(\dfrac{1}{a^{p-3}} - \dfrac{1}{b^{p-3}}\right) \quad (p \neq 3 \text{ のとき})}, \\ \boxed{4\pi\log\dfrac{b}{a} \quad (p = 3 \text{ のとき})}. \end{cases}
\end{aligned}$$