数学演習第二（演習第 13 回）【解答例】

線形： 行列と線形変換の固有値，表現行列の対角化　　2021 年 1 月 27 日

【小テストの解答例】

$\boxed{1}$ (1) 固有多項式を因数分解する．

$$\det(\lambda E_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ 0 & \lambda-3 & \lambda-3 \\ 1 & -1 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-3)\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & \lambda-4 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-3)\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-3)^2\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda-3)^2(\lambda-1) \qquad \therefore \lambda = 1, 3$$

答は（**イ**）．

(2) $\lambda = 1$ のとき：$E_3 - A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore V_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$, $\dim V_1 = 1$

$\lambda = 3$ のとき：$3E_3 - A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore V_3 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$, $\dim V_3 = 2$　　答は（**イ**）．

(3) (1) より，$a = 1, b = 3$ で，3 は 2 重解であるから，答は（**イ**），（**ウ**），（**エ**）．

(4) (2) から，$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ とおくと，$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ で，$P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ なので，

$$A^n = P(P^{-1}AP)^nP^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 3^n & 3^n \\ -1 & 3^n & 0 \\ 1 & 0 & 3^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 2\cdot 3^n-2 & 2\cdot 3^n-2 \\ 3^n-1 & 3^n+1 & 1-3^n \\ 1-3^n & 3^n-1 & 3^{n+1}-1 \end{bmatrix}$$

と $b = 3$ により，答は（**エ**）．

【レポート課題の解答例】

$\boxed{2}$ (1) f の固有値は行列 A の固有値と一致するので，A の固有多項式を因数分解する．

$$\det(\lambda E_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda-5 & -4 & -3 \\ 1 & \lambda & 3 \\ 0 & \lambda+2 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda+2)\begin{vmatrix} \lambda-5 & -4 & -3 \\ 1 & \lambda & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda+2)\begin{vmatrix} \lambda-4 & \lambda-4 & 0 \\ 1 & \lambda & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+2)(\lambda-4)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-4)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-4)^2$$

より，求めるすべての固有値は $\boxed{-2,\ 4}$.

(2) $\lambda = -2$ のとき：$-2\,E_3 - A = \begin{bmatrix} -7 & -4 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -18 & 18 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore V_{-2} = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$

$\lambda = 4$ のとき：$4\,E_3 - A = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -3 \\ 1 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\therefore V_4 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$

から，固有空間 V_{-2}, V_4 の基底の１つはそれぞれ $\boxed{\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right),\ \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)}$ である．

(3) (2) の結果より，$\dim V_{-2} + \dim V_4 = 2 < 3 = \dim \mathbb{R}^3$ なので，線形代数学の教科書の定理 24.6 により，f は対角化可能でない．

(4) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \notin V_{-2} + V_4$ は容易に確かめられるので，(2) の結果から，$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ は正則で，通常の計算で $P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ がわかる．そして，

$$P^{-1}AP = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ -1 & -4 & -2 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

は下三角行列である．そこで，$\boldsymbol{y}(t) = P^{-1}\boldsymbol{x}(t)$ とおいて，$\boldsymbol{x}(t) = P\,\boldsymbol{y}(t)$ を方程式 $\boldsymbol{x}'(t) = A\,\boldsymbol{x}(t)$ に代入すると，P は定数行列なので，$P\,\boldsymbol{y}'(t) = AP\,\boldsymbol{y}(t)$ より，$\boldsymbol{y}'(t) = P^{-1}AP\,\boldsymbol{y}(t)$ を得る．よって，連立の斉次線形微分方程式 $y_1'(t) = 4\,y_1(t),\ y_2'(t) = y_1(t) + 4\,y_2(t),\ y_3'(t) = -2\,y_3(t)$ に変換されるが，$P^{-1}AP$ は下三角行列のため，y_1, y_2, y_3 の順に解ける．今の場合はもっとよく，一般解 $y_1(t) = C_1\,e^{4t}$, $y_3(t) = C_3\,e^{-2t}$ は最初に得られる．また，よく知られているように，$y_2'(t) = C_1\,e^{4t} + 4\,y_2(t)$ を $\dfrac{d}{dt}(e^{-4t}\,y_2(t)) = C_1$ と変形して，t で積分することにより，$y_2(t) = (C_1\,t + C_2)\,e^{4t}$ がわかる．但し，C_1, C_2, C_3 は任意の定数を表す．よって，求める一般解は

$$\boldsymbol{x}(t) = P\,\boldsymbol{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1\,e^{4t} \\ (C_1\,t + C_2)\,e^{4t} \\ C_3\,e^{-2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (C_1\,t + C_1 + C_2)\,e^{4t} - C_3\,e^{-2t} \\ -(C_1\,t + C_2)\,e^{4t} + C_3\,e^{-2t} \\ (C_1\,t + C_2)\,e^{4t} + C_3\,e^{-2t} \end{bmatrix}$$

以上のように，一般の複素成分の正方行列 M に対して，M は対角化可能でないことがあるが，M は必ず三角化可能であることが知られており，斉次線形微分方程式系 $\boldsymbol{x}'(t) = M\,\boldsymbol{x}(t)$ を解くためには三角化で十分であることを示す一例が (4) である．

$\boxed{\text{注意}}$ $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ で選ぶと，$P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ で，$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ も下三角行列になる．一般に，３次正方行列の場合，１次独立な固有ベクトル２つを第２列，第３列ベクトルとしてもつ任意の正則行列 P について，$P^{-1}AP$ は下三角行列になることが証明可能である．

【それ以外の自習用問題の解答例】

3 (a) について

(1) $F_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 8 & 9 \\ -6 & \lambda + 7 \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda + 1)(\lambda - 2)$. A の固有値は $\lambda = -1, 2$.

(2) $\underline{\lambda = -1 \text{ に対して}}$: $-E - A = \begin{bmatrix} -9 & 9 \\ -6 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ より，$(-E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は $\boldsymbol{x} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (s は任意定数). よって，V_{-1} の基底は $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$. $\underline{\lambda = 2 \text{ に対して}}$: $2E - A = \begin{bmatrix} -6 & 9 \\ -6 & 9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ より，$(2E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は $\boldsymbol{x} = s\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ (s は任意定数). よって，V_3 の基底は $\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$.

(3) $P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ とおけば，$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(b) について

(1) $F_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & 1 & -5 \\ -1 & \lambda - 2 & -3 \\ 1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$. A の固有値は $\lambda = 1, 2, 3$.

2 $\underline{\lambda = 1 \text{ に対して}}$: $E - A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -5 \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より，$(E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は $\boldsymbol{x} = s\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (s は任意定数). よって，V_1 の基底は $\left(\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$. $\underline{\lambda = 2 \text{ に対して}}$: $2E - A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より，$(2E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は $\boldsymbol{x} = s\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (s は任意定数). よって，V_2 の基底は $\left(\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$. $\underline{\lambda = 3 \text{ に対して}}$: $3E - A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -5 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より，$(3E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は $\boldsymbol{x} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (s は任意定数). よって，V_3 の基底は $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$.

(3) $P = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ とおけば，$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

(c) について

(1) $F_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -2 & -1 \\ 4 & \lambda - 5 & -2 \\ -4 & 4 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3$. A の固有値は $\lambda = 1$.

(2) $\underline{\lambda = 1 \text{ に対して}}$: $E - A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 4 & -4 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より, $(E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は $\boldsymbol{x} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ (s, t は任意定数). よって, V_1 の基底は $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$.

(3) $\dim V_1 = 2 < 3$ であるから，(c) の A は対角化可能でない.

4 (1) $(A\boldsymbol{p}_1, \ldots, A\boldsymbol{p}_n) = (f(\boldsymbol{p}_1), \ldots, f(\boldsymbol{p}_n)) = (\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n)D = (\mu_1\boldsymbol{p}_1, \ldots, \mu_n\boldsymbol{p}_n)$ (2 番目の等号で表現行列の定義を用いた) より, $A\boldsymbol{p}_k = \mu_i\boldsymbol{p}_i$ $(1 \leq k \leq n)$. $\boldsymbol{p}_k \neq \boldsymbol{0}$ であるから, μ_k は A の固有値であり, $\boldsymbol{p}_k$ は μ_k に対する固有ベクトルである.

(2) (1) の結果から，$AP = A[\,\boldsymbol{p}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{p}_n\,] = [\,A\boldsymbol{p}_1 \ \cdots \ A\boldsymbol{p}_n\,] = [\,\mu_1\boldsymbol{p}_1 \ \cdots \ \mu_n\boldsymbol{p}_n\,] = [\,\boldsymbol{p}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{p}_n\,]D = PD$. $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ が 1 次独立なので，$P = [\,\boldsymbol{p}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{p}_n\,]$ は正則行列となる. よって, $AP = PD$ から $P^{-1}AP = D$ が従う.

(3) $A = PDP^{-1}$ と書けるから, $F_A(\lambda) = |\lambda E - A| = |P(\lambda E - D)P^{-1}| = |P|\begin{vmatrix} \lambda - \mu_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda - \mu_n \end{vmatrix}|P^{-1}| = (\lambda - \mu_1)\cdots(\lambda - \mu_n)$. ここで, $|P||P^{-1}| = |PP^{-1}| = |E_n| = 1$ を用いた.

(4) $A = PDP^{-1}$ より $A\boldsymbol{x} = \mu\boldsymbol{x} \Leftrightarrow (\mu E - D)P^{-1}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \mu-\mu_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \mu-\mu_n \end{bmatrix} P^{-1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ であるから，μ は $\mu_1, \dots, \mu_n$ のいずれかと一致する．$\mu_k = \mu$ となる k を $k_1, \dots, k_m$ (m が固有値 μ の代数的重複度) とすれば，$\boldsymbol{x} \in V_\mu \Leftrightarrow P^{-1}\boldsymbol{x} \in \langle \boldsymbol{e}_{k_1}, \dots, \boldsymbol{e}_{k_m} \rangle \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in \langle \boldsymbol{p}_{k_1}, \dots, \boldsymbol{p}_{k_m} \rangle$．よって，$V_\mu = \langle \boldsymbol{p}_{k_1}, \dots, \boldsymbol{p}_{k_m} \rangle$ となり，$\dim V_\mu = m$ が示された．

5

(1) $P^{-1}AP = C$, $P^{-1}BP = D$ とおくと，C, D は対角行列なので，$CD = DC$ が成り立つから

$$AB = (PCP^{-1})(PDP^{-1}) = P(CD)P^{-1} = P(DC)P^{-1} = (PDP^{-1})(PCP^{-1}) = BA$$

をみたす．

(2) $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ を A の固有値とし，$\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{p}_k \in V_{\lambda_k}$ $(k = 1, \cdots, n)$ とすると

$$A(B\,\boldsymbol{p}_k) = BA\,\boldsymbol{p}_k = B(\lambda_k\,\boldsymbol{p}_k) = \lambda_k(B\,\boldsymbol{p}_k)$$

より，$B\,\boldsymbol{p}_k \in V_{\lambda_k}$ を得る．また，仮定から，$\dim V_{\lambda_k} = 1$ なので，$B\,\boldsymbol{p}_k = \mu_k\,\boldsymbol{p}_k$ となる複素数 μ_k が存在する．よって，$P = [\,\boldsymbol{p}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{p}_n\,]$ と定めると，$\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_n$ は１次独立であるから，P は正則で，$C = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{bmatrix}$，$D = \begin{bmatrix} \mu_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \mu_n \end{bmatrix}$ とおくと，$\boxed{4}$ (2) と同様に $AP = PC$, $BP = PD$ が成り立つので，$P^{-1}AP = C$, $P^{-1}BP = D$ をみたす．

6

(1) $f(\boldsymbol{c}_1) = q\,\boldsymbol{c}_2$, $f(\boldsymbol{c}_2) = \boldsymbol{c}_1 + p\,\boldsymbol{c}_2$, $F_A(\alpha) = 0$ および $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2$ の１次独立性から

$$f(\boldsymbol{c}_2) = (p-\alpha)\,\boldsymbol{c}_2 + (\boldsymbol{c}_1 + \alpha\,\boldsymbol{c}_2) = \alpha\,\boldsymbol{c}_2 + (\boldsymbol{c}_1 + \alpha\,\boldsymbol{c}_2)$$
$$f(\boldsymbol{c}_1 + \alpha\,\boldsymbol{c}_2) = \alpha\,\boldsymbol{c}_1 + (p\alpha + q)\,\boldsymbol{c}_2 = \alpha\,(\boldsymbol{c}_1 + \alpha\,\boldsymbol{c}_2)$$

をみたす．

(2) 簡単のため，$T = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}$ とおくと，$T^2 = \begin{bmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 2\alpha & \alpha^2 \end{bmatrix}$ である．ここで，$n \geqq 2$ に対して，$T^n = \begin{bmatrix} \alpha^n & 0 \\ n\alpha^{n-1} & \alpha^n \end{bmatrix}$ を n に関する帰納法で示す．そこで，n での成立を帰納法の仮定とすると

$$T^{n+1} = T^n\,T = \begin{bmatrix} \alpha^n & 0 \\ n\alpha^{n-1} & \alpha^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^{n+1} & 0 \\ (n+1)\alpha^n & \alpha^{n+1} \end{bmatrix}$$

が導かれる．

(3) (1) と (2) の結果より，$n \geqq 1$ に対して

$$(f^n(\boldsymbol{c}_2), f^n(\boldsymbol{c}_1 + \alpha\,\boldsymbol{c}_2)) = (\boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_1 + \alpha\,\boldsymbol{c}_2)\,T^n = (\boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_1 + \alpha\,\boldsymbol{c}_2) \begin{bmatrix} \alpha^n & 0 \\ n\alpha^{n-1} & \alpha^n \end{bmatrix}$$

が成り立つ．特に，$\boldsymbol{c}_2$, $\boldsymbol{c}_1 + \alpha\,\boldsymbol{c}_2$ の第 n 項 $(\boldsymbol{c}_2)_n$, $(\boldsymbol{c}_1 + \alpha\,\boldsymbol{c}_2)_n$ はそれぞれ

$$(\boldsymbol{c}_2)_n = (f^{n-1}(\boldsymbol{c}_2))_1 = \alpha^{n-1}\,(\boldsymbol{c}_2)_1 + (n-1)\,\alpha^{n-2}\,(\boldsymbol{c}_1 + \alpha\,\boldsymbol{c}_2)_1 = (n-1)\,\alpha^{n-2}$$
$$(\boldsymbol{c}_1 + \alpha\,\boldsymbol{c}_2)_n = (f^{n-1}(\boldsymbol{c}_1 + \alpha\,\boldsymbol{c}_2))_1 = \alpha^{n-1}\,(\boldsymbol{c}_1 + \alpha\,\boldsymbol{c}_2)_1 = \alpha^{n-1}$$

で表される．また，任意の $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3, \cdots) \in W$ に対して

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} = a_1\,\boldsymbol{c}_1 + a_2\,\boldsymbol{c}_2 = (\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2) \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} &= (\boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_1 + \alpha\,\boldsymbol{c}_2) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \\ &= (\boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_1 + \alpha\,\boldsymbol{c}_2) \begin{bmatrix} -\alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = (\boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_1 + \alpha\,\boldsymbol{c}_2) \begin{bmatrix} -\alpha\,a_1 + a_2 \\ a_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

と書ける．よって，$n \geqq 1$ に対して，$\alpha = \dfrac{p}{2}$ に注意して

$$\begin{aligned} a_n &= (a_2 - \alpha\,a_1)(n-1)\,\alpha^{n-2} + a_1\,\alpha^{n-1} = (2-n)\,a_1\,\alpha^{n-1} + (n-1)\,a_2\,\alpha^{n-2} \\ &= \left\{ \left(a_2 - \frac{p}{2}\,a_1 \right) n + (p\,a_1 - a_2) \right\} \frac{p^{n-2}}{2^{n-2}} \end{aligned}$$

が得られる．こうして，対角化可能でなくても，そこそこできることを例示した訳であるが，これらは偶然でなく，対角化可能でない正方行列にも対角行列に近い標準形（**ジョルダン標準形**と呼ばれる）が存在し，それらが対角行列の代用になることがある．しかし，正方行列のジョルダン標準形やそれと同等の**スペクトル分解**などはより高度な線形代数学の話題であるため，ここでは割愛し，関心がある学生はこれらに進んで学習されることを期待して筆を擱く．