数学演習第二・中間統一試験【解説】 (2020 年 12 月 2 日実施)

$\boxed{1}$ (1) $f_x(x,y) = (x^3 - 6xy + 24x + y^2)_x = \boxed{3x^2 - 6y + 24}$.

(2) $f_{xy}(x,y) = (3x^2 - 6y + 24)_y = \boxed{-6}$.

(3) $f_x(1,1) = 3 - 6 + 24 = 21$, $f_y(x,y) = -6x + 2y$, 特に $f_y(1,1) = -4$ より，求める法線の方程式は

$$\boxed{\frac{x-1}{21} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z-20}{-1}}.$$

(4) $0 = f_y(a,b) = 2(-3a+b)$ より，$b = 3a$ をみたすので,

$$0 = f_x(a,b) = f_x(a,3a) = 3(a-2)(a-4)$$

から，$f(x,y)$ の停留点は $(2,6)$, $(4,12)$ に限られる．次に，$f_{xx}(x,y) = 6(x-1)$, $f_{yy}(x,y) = 2$, $f_{xy}(x,y) = -6$ より，$D(a,b) = f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - \{f_{xy}(a,b)\}^2$ とおくと，$D(a,b) = 12(a-4)$ なので, 特に $D(2,6) = -24 < 0$ から, $f(x,y)$ は点 $(2,6)$ で極値をとらない．一方, $D(4,12) = 0$ であるが,

$$f(x+4, y+12) = x^3 + 3x^2 + (3x-y)^2 + 16$$

より，$0 < |x| < 1$ のとき

$$f(x+4,y+12) \geqq x^2(1-|x|) + 2x^2 + (3x-y)^2 + 16 > 2x^2 + (3x-y)^2 + 16 > 16 = f(4,12)$$

が成り立つ．よって，$\boxed{f(x,y) \text{ は点 } (4,12) \text{ で極小値 } 16 \text{ をとる}}$.

$\boxed{2}$ (5)

$$f_x(x,y) = e^{\frac{y}{1+x}} \left(\frac{y}{1+x}\right)_x = -\frac{y}{(1+x)^2}\, e^{\frac{y}{1+x}}$$

より，特に $f_x(1,1) = \boxed{-\frac{1}{4}\sqrt{e}}$.

(6) $z(t) = \exp\left(\dfrac{e^t}{t^2+4t+2}\right)$ なので

$$z'(t) = \left(\frac{e^t}{t^2+4t+2}\right)' z(t) = \frac{(t^2+2t-2)e^t}{(t^2+4t+2)^2}\, z(t)$$

から，特に $z'(0) = \boxed{-\frac{1}{2}\sqrt{e}}$．ただし，$\exp h(t) = e^{h(t)}$ である.

$\boxed{3}$ (7) $g(u,v) = f(u^2v^2, u^3+v^3)$ に連鎖律を適用すると

$$\begin{aligned}
g_u &= f_x\,(u^2v^2)_u + f_y\,(u^3+v^3)_v = 2uv^2\, f_x + 3u^2\, f_y \\
g_{uv} &= 4uvf_x + 2uv^2(2u^2vf_{xx} + 3v^2f_{xy}) + 3u^2(2u^2vf_{yx} + 3v^2f_{yy}) \\
&= 4u^3v^3\, f_{xx} + \boxed{6uv(u^3+v^3)}\, f_{xy} + 9u^2v^2\, f_{yy} + 4uv\, f_x\,.
\end{aligned}$$

$\boxed{4}$ (8) $\log(1+s) = s - \frac{1}{2}s^2 + o(s^2)$, $\sin t = t + o(t^2)$ $(s,t \to 0)$ を $s = \sin(x+y)$, $t = x+y$ で適用して

$$f(x,y) = \sin(x+y) - \frac{1}{2}\sin^2(x+y) + o(r^2) = \boxed{x + y - \frac{1}{2}x^2 - xy - \frac{1}{2}y^2} + o(r^2)\,.$$

(9) $\cos s = 1 - \dfrac{1}{2}s^2 + o(s^2)$, $\dfrac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + o(t^2)$ $(s, t \to 0)$ を $s = 2x + 4y$, $t = 3x + y$ で適用して

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \cos(2x+4y) \cdot \frac{1}{1+3x+y} = \{1 - 2(x+2y)^2 + o(r^2)\}\{1 - (3x+y) + (3x+y)^2 + o(r^2)\} \\ &= \boxed{1 - 3x - y + 7x^2 - 2xy - 7y^2} + o(r^2). \end{aligned}$$

$\boxed{5}$

(10) $x_u = \dfrac{v^2}{1+u^2v^4}$, $x_v = \dfrac{2uv}{1+u^2v^4}$, $y_u = -3u^2v\ \sin(u^3v)$, $y_v = -u^3\ \sin(u^3v)$ より

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = x_u y_v - x_v y_u = \boxed{\frac{5u^3v^2}{1+u^2v^4}\ \sin(u^3v)}.$$

$\boxed{6}$ (11) 空間内の平面は，その平面上の１点と法線で決定される．そこで，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (1, -2, -4) \times (2, -1, -1) = (-2, -7, 3)$$

が平面 H の１つの法線ベクトルを与えるので，H の方程式は

$$-2(x-2) - 7(y-1) + 3(z-1) = 0 \qquad \therefore\ \boxed{-2x - 7y + 3z + 8 = 0}.$$

(12) (11) の計算を利用すると，ABC の面積は

$$\frac{1}{2}\|\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}}\| = \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2 + (-7)^2 + 3^2} = \boxed{\frac{\sqrt{62}}{2}}.$$

(13) (11) より，求める距離は，点と平面の距離公式から

$$\frac{|3 \cdot 8 + 8|}{\sqrt{(-2)^2 + (-7)^2 + 3^2}} = \boxed{\frac{32}{\sqrt{62}}}.$$

$\boxed{7}$ (14) $A = [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3]$ を簡約化して

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 7 & -8 \\ 5 & 6 & k \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 2 & 7 & -8 \\ 5 & 6 & k \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 0 & 13 & -26 \\ 0 & 21 & k-45 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 21 & k-45 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & k-3 \end{bmatrix}$$

から，求める k の条件は $\boxed{k = 3}$．或いは $\det A = 0$ から求めてもよいが，それでは (15) に使えない．

(15) (14) の簡約行列より，求める一次関係式の１つは $\boxed{-3\boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}}$．

$\boxed{8}$ (16) $\boldsymbol{b}_1 = -\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = \boxed{\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}}$.

(17) $[\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3]\,[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{A}} = \boldsymbol{v} = [\boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2\ \boldsymbol{b}_3]\,[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}}$, $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3) = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)\,[[\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{A}}\ [\boldsymbol{b}_2]_{\mathcal{A}}\ [\boldsymbol{b}_3]_{\mathcal{A}}]$ に注意すると

$$[\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3]\,[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{A}} = [\boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2\ \boldsymbol{b}_3] \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3] \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3] \begin{bmatrix} -p+q+r \\ p-q+r \\ p+q-r \end{bmatrix}$$

をみたす．ここで，$[\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3]$ は正則なので，左から $[\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3]$ の逆行列をかけて

$$[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{A}} = \boxed{\begin{bmatrix} -p+q+r \\ p-q+r \\ p+q-r \end{bmatrix}}.$$

$\boxed{9}$ (18) W_2 を定義する同次連立１次方程式の係数行列を簡約化して

$$\begin{bmatrix}1&-1&-1&3&-4\\1&2&1&3&12\\1&1&-1&-5&0\\-1&-3&-1&1&-14\\-2&-2&1&4&-5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&-1&3&-4\\0&3&2&0&16\\0&2&0&-8&4\\0&-4&-2&4&-18\\0&-4&-1&10&-13\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&-1&3&-4\\0&1&0&-4&2\\0&3&2&0&16\\0&2&1&-2&9\\0&4&1&-10&13\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&-1&-1&-2\\0&1&0&-4&2\\0&0&2&12&10\\0&0&1&6&5\\0&0&1&6&5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&-1&-2\\0&1&0&-4&2\\0&0&1&6&5\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&5&3\\0&1&0&-4&2\\0&0&1&6&5\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

から，$x_1+5x_4+3x_5=0,\ x_2-4x_4+2x_5=0,\ x_3+6x_4+5x_5=0$ という同値な連立１次方程式を得る．よって，W_2 の基底の１つとして

$$\boxed{\left(\begin{bmatrix}-5\\4\\-6\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-3\\-2\\-5\\0\\1\end{bmatrix}\right)}.$$

(19) $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^5$ が W_1 の元であるとき，$x_1=c_1+c_2,\ x_2=4c_1-5c_2,\ x_3=5c_1+c_2,$ $x_4=6c_1+2c_2,\ x_5=3c_1+3c_2$ をみたす実数 $c_1,\ c_2$ が存在する．更に，$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}\in W_2$ ならば，(18) より，$0=x_1+5x_4+3x_5=20(2c_1+c_2)$, $0=x_2-4x_4+2x_5=-7(2c_1+c_2)$, $0=x_3+6x_4+5x_5=28(2c_1+c_2)$ が成り立つ．つまり，$c_2=-2c_1$ をみたす．よって，例えば $c_1=1$ として，$W_1\cap W_2$ の基底の１つは

$$\boxed{\left(\begin{bmatrix}-1\\14\\3\\2\\-3\end{bmatrix}\right)}.$$

$\boxed{10}$ (20) $c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2+c_3\boldsymbol{a}_3=(c_1+c_2+c_3)\boldsymbol{v}_1+(2c_1+3c_2+6c_3)\boldsymbol{v}_2+(5c_1+4c_2+c_3)\boldsymbol{v}_3+(c_1+2c_2+kc_3)\boldsymbol{v}_4$ なので，$c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2+c_3\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{0}$ は，$\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{v}_4$ の１次独立性により，同次連立１次方程式

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\2&3&6\\5&4&1\\1&2&k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

に帰着されるから，$\begin{bmatrix}1&1&1\\2&3&6\\5&4&1\\1&2&k\end{bmatrix}$ を簡約化して

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\2&3&6\\5&4&1\\1&2&k\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1\\0&-1&-4\\0&-1&-4\\0&1&k-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&4\\0&1&k-1\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-3\\0&1&4\\0&0&k-5\\0&0&0\end{bmatrix}$$

より，求める k の条件は $\boxed{k=5}$.