2020年度 数学演習第二 中間統一試験 問題用紙　2020.12. 2 実施 (90 分)

・解答用紙の所定欄に結果のみを記すこと．
・簡潔な解答になるよう努めること．不十分と判断された解答には得点を与えないことがある．

1　$f(x,y)=x^3-6xy+24x+y^2$ とする．

(1) 1 階偏導関数 $f_x(x,y)$ を求めよ．

(2) 2 階偏導関数 $f_{xy}(x,y)$ を求めよ．

(3) 曲面 $z=f(x,y)$ 上の点 $(1,1,20)$ における法線の方程式を求めよ．

(4) $f(x,y)$ が極値をとる点の座標とその極値を求めよ．(極大値か極小値かを明記すること．)

2 $f(x,y)=e^{\frac{y}{1+x}}$ とする．

(5) 偏導関数 $f_x(x,y)$ について $f_x(1,1)$ の値を求めよ．

(6) $x(t)=t^2+4t+1, y(t)=e^t$ とし，合成関数 $z(t)=f(x(t),y(t))$ を考える．$z(t)$ の導関数 $z'(t)$ に対して，$z'(0)$ の値を求めよ．

3　$f(x,y)$ を C^2 級関数とし，$\varphi(u,v)=u^2v^2,\ \psi(u,v)=u^3+v^3$ とおく．

(7)　合成関数 $g(u,v)=f(\varphi(u,v),\psi(u,v))$ を考える．このとき，2 階偏導関数について

$$g_{uv}=4u^3v^3f_{xx}+\boxed{}f_{xy}+9u^2v^2f_{yy}+4uvf_x$$

が成り立つ．空所に入る適切な u,v の式を解答欄に記入せよ．

4 次の $f(x,y)$ の $(0,0)$ における 2 次の項までのマクローリン展開

$$f(x,y)=\underline{a_{00}+a_{10}x+a_{01}y+a_{20}x^2+a_{11}xy+a_{02}y^2}+o(r^2)\quad (r=\sqrt{x^2+y^2}\to 0)$$

を求め，<u>下線部に相当する部分のみ</u>を解答欄に記入せよ．

(8) $f(x,y)=\log(1+\sin(x+y))$.

(9) $f(x,y)=\dfrac{\cos(2x+4y)}{1+3x+y}$.

5 次の変換のヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ を求めよ．

(10) $x=\mathrm{Tan}^{-1}(uv^2)$, $y=\cos(u^3v)$

$\boxed{\mathbf{6}}$ 4点 $A(1,3,5)$，$B(2,1,1)$，$C(3,2,4)$，$D(0,0,8)$ を考える．

(11) 3点 A，B，C を通る平面を H とするとき，H の方程式を求めよ．

(12) 3角形 ABC の面積を求めよ．

(13) 点 D と平面 H の距離を求めよ．

$\boxed{\mathbf{7}}$ 次の $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -8 \\ k \end{bmatrix}$ を考える．

(14) $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ が一次従属となるための k の条件を求めよ．

(15) k が (14) の条件をみたすとき $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ の間に成り立つ非自明な一次関係式を求めよ．

$\boxed{\mathbf{8}}$ $\mathbb{R}^3$ の基底を $\mathcal{A} = \left(\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \right)$ とし，$\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{b}_2$，$\boldsymbol{b}_3$ の $\mathcal{A}$ に関する座標を $[\boldsymbol{b}_1]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，$[\boldsymbol{b}_2]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$，$[\boldsymbol{b}_3]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ とする．

(16) $\boldsymbol{b}_1$ を求めよ．

(17) $\mathcal{B} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ は $\mathbb{R}^3$ の基底である．$\boldsymbol{v}$ の $\mathcal{B}$ に関する座標を $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$ とするとき $\boldsymbol{v}$ の $\mathcal{A}$ に関する座標 $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{A}}$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{9}}$ $\mathbb{R}^5$ の部分空間 $W_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle$，$W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \begin{array}{c} x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 12x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - 5x_4 = 0 \\ -x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 - 14x_5 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 - 5x_5 = 0 \end{array} \right\}$ を考える．

(18) W_2 の基底の一例として，$\left(\begin{bmatrix} \square \\ 4 \\ \square \\ 1 \\ \square \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \square \\ -2 \\ \square \\ 0 \\ \square \end{bmatrix} \right)$ の形のものがとれる．空所にあてはまる適切な数値を解答欄に記入せよ．

(19) $W_1 \cap W_2$ の基底の一例を求めよ．ただし，<u>整数を成分とする列ベクトルを用いること</u>．

$\boxed{\mathbf{10}}$ ベクトル空間 V に属する $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$，$\boldsymbol{v}_3$，$\boldsymbol{v}_4$ が一次独立であるとし，$\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 5\boldsymbol{v}_3 + \boldsymbol{v}_4$，$\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 4\boldsymbol{v}_3 + 2\boldsymbol{v}_4$，$\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{v}_1 + 6\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 + k\boldsymbol{v}_4$ とする．

(20) $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ が一次従属となる k の条件を求めよ．