数学演習第二・期末統一試験【解説】 (2021 年 2 月 3 日実施)

$\boxed{1}$ (1) $y \neq 0$ のとき $x^2y + y^3 - 2x = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy^{-1} = 0 \Leftrightarrow (x - y^{-1})^2 - y^{-2} + y^2 = 0$．これを x について解くと $x = y^{-1} \pm \sqrt{y^{-2} - y^2} = y^{-1} \pm |y|^{-1}\sqrt{1 - y^4}$．このうち，$\lim_{y\to 0+0}\psi(y) = \lim_{y\to 0-0}\psi(y) = 0$ となるものを選んで，$\psi(y) = y^{-1} - y^{-1}\sqrt{1 - y^4} = \boxed{y^3/(1 + \sqrt{1 - y^4})}$．

(2) 接線の傾きは $\varphi'(1) = -g_x(1,1)/g_y(1,1) = 0$．よって，求める接線は $\boxed{y = 1}$．

(3) まず，$g(x, \varphi(x)) = 0$ を x について 2 回微分して $x = 1$ を代入して $\varphi''(1) = -\dfrac{1}{2}$ を得る．次に，極限値を求める．$\varphi(1) = 1$ なので 0/0 不定形．ロピタルの定理を用いて

$$\lim_{x\to 1}\frac{\varphi(x) - 1}{1 - \cos\{2(x-1)\}} = \lim_{x\to 1}\frac{\varphi'(x)}{2\sin\{2(x-1)\}}$$

(2) よりこの式の右辺は 0/0 不定形なので，もう一度ロピタルの定理を用いて

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\varphi''(x)}{4\cos\{2(x-1)\}} = \frac{\varphi''(1)}{4} = \boxed{-\frac{1}{8}}.$$

(4) $F(x,y) = y^2 - \lambda(x^2y + y^3 - 2x)$ とおくと

$$F_x = -\lambda(2xy - 2), \quad F_y = 2y - \lambda(x^2 + 3y^2), \quad F_\lambda = -(x^2y + y^3 - 2x).$$

$F_x = F_y = F_\lambda = 0$ を解くと $(\lambda, x, y) = (0,0,0)$，$(\frac{1}{2}, 1, 1)$，$(-\frac{1}{2}, -1, -1)$．まず．点 $(0,0)$ を考える．$y \neq 0$ に対して $f(\psi(y), y) - f(0,0) = y^2 > 0$ なので，$f(x,y)$ は点 $(0,0)$ で極小となる．次に，点 $(1,1)$ を考える．$h(x) = f(x, \varphi(x)) = \{\varphi(x)\}^2$ とおく．$\varphi(1) = 1$，$\varphi'(1) = 0$，$\varphi''(1) = -\dfrac{1}{2}$ を用いて，$h'(1) = 0, h''(1) = -1$ を得る．よって，$f(x,y)$ は点 $(1,1)$ で極大となり，極大値は $f(1,1) = 1$．同様に，$f(x,y)$ は点 $(-1,-1)$ で極大となり，極大値は $f(-1,-1) = 1$．以上より，$\boxed{\text{点 } (1,1) \text{ で極大値 } 1 \text{ をとる}}$，$\boxed{\text{点 } (-1,-1) \text{ で極大値 } 1 \text{ をとる}}$．

$\boxed{2}$ (5) $D_1 = \{(x,y) \in D \mid y \geq x^2\}$，$D_2 = \{(x,y) \in D \mid y \leq x^2\}$ とおくと

$$\iint_D \min(x^2, y)\,dxdy = \iint_{D_1} x^2\,dxdy + \iint_{D_2} y\,dxdy$$

となる．ここで，

$$\iint_{D_1} x^2\,dxdy = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} x^2\,dx = \int_0^1 \frac{1}{3}y^{3/2}\,dy = \frac{2}{15},$$

$$\iint_{D_2} y\,dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} y\,dy = \int_0^1 \frac{1}{2}x^4\,dx = \frac{1}{10}.$$

よって，$\displaystyle\iint_D \min(x^2, y)\,dxdy = \frac{2}{15} + \frac{1}{10} = \boxed{\frac{7}{30}}$．

(6) $x + 2y = u$，$2x + y = v$ とおくと $x = -\dfrac{1}{3}u + \dfrac{2}{3}v$，$y = \dfrac{2}{3}u - \dfrac{1}{3}v$，

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}.$$

ここで，$E = \{(u,v) \mid |u| \leq 1, |v| \leq 1\}$，$E_1 = \{(u,v) \in E \mid v \leq u\}$，$E_2 = \{(u,v) \in E \mid v \geq u\}$ とおくと

$$\iint_D |x - y|\,dxdy = \iint_E |u - v||-\frac{1}{3}|\,dudv = \frac{1}{3}\left(\iint_{E_1}(u - v)\,dudv + \iint_{E_2}(-(u - v))\,dudv\right)$$

となり，

$$\iint_{E_1}(u-v)\,dudv=\int_{-1}^{1}du\int_{-1}^{u}(u-v)\,dv=\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}u^2+u+\frac{1}{2}\right)du=\frac{4}{3},$$

$$\iint_{E_2}(-(u-v))\,dudv=\int_{-1}^{1}du\int_{u}^{1}(-(u-v))\,dv=\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}u^2-u+\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{3}.$$

よって，$\displaystyle\iint_D|x-y|\,dxdy=\frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}+\frac{4}{3}\right)=\boxed{\frac{8}{9}}$.

(7) $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ とおく．(x,y) が D を動くとき，(r,θ) は $E=\{(r,\theta)\mid 0\le r\le 1,-\pi/4\le\theta\le\pi/4\}$ を動く．

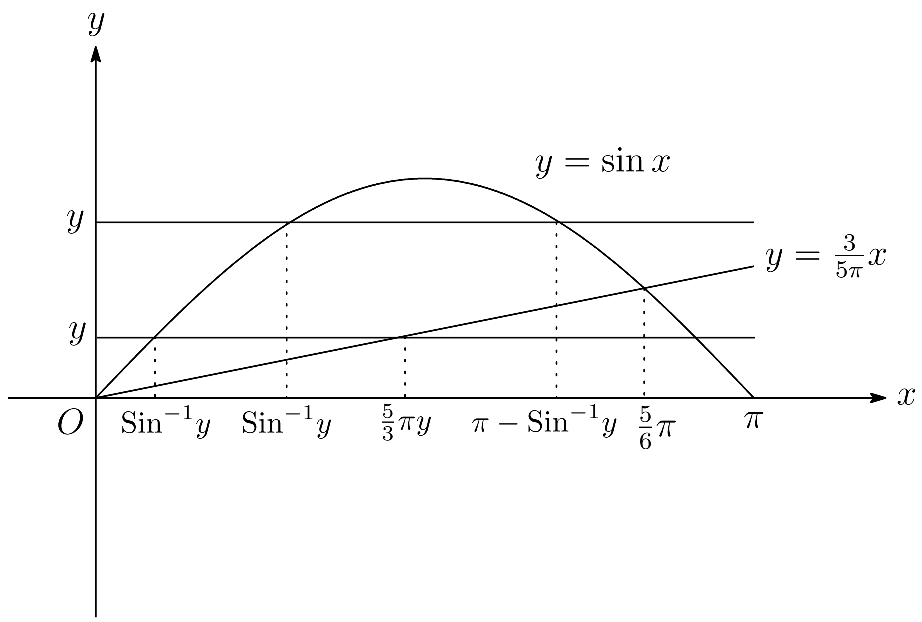
$$\iint_D(x+\sqrt{3}y)^2\,dxdy=\iint_E(r\cos\theta+\sqrt{3}r\sin\theta)^2rdrd\theta=\iint_E(\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta)^2r^3drd\theta$$
$$=\int_0^1 r^3\,dr\int_{-\pi/4}^{\pi/4}(\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta)^2\,d\theta=\frac{1}{4}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}(\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta)^2\,d\theta$$

となる．$(\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta)^2=2+\sqrt{3}\sin2\theta-\cos2\theta$ なので，

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta)^2\,d\theta=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(2+\sqrt{3}\sin2\theta-\cos2\theta)\,d\theta=\pi-1.$$

よって，$\displaystyle\iint_D(x+\sqrt{3}y)^2\,dxdy=\boxed{\frac{1}{4}(\pi-1)}$.

$\boxed{3}$ (8) 積分領域を図示すると次のようになる．

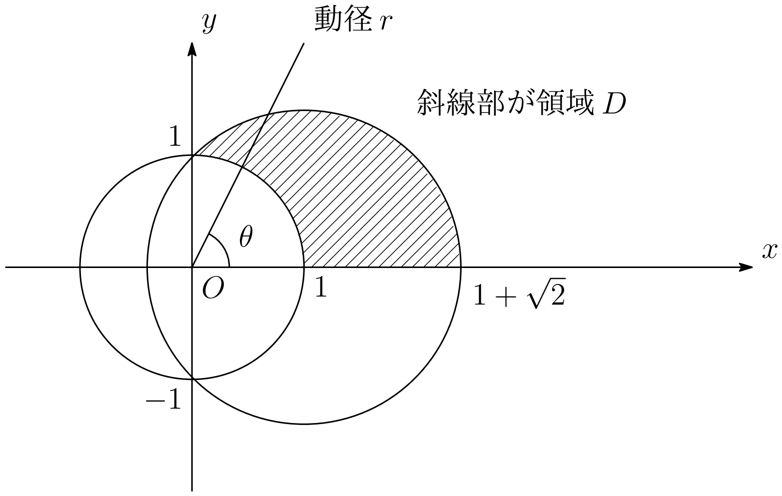


よって，

$$\int_0^{\frac{5}{6}\pi}dx\int_{\frac{3}{5\pi}x}^{\sin x}f(x,y)\,dy=\boxed{\int_0^{\frac{1}{2}}dy\int_{\mathrm{Sin}^{-1}y}^{\frac{5}{3}\pi y}f(x,y)\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int_{\mathrm{Sin}^{-1}y}^{\pi-\mathrm{Sin}^{-1}y}f(x,y)\,dx}.$$

【注】$\pi-\mathrm{Sin}^{-1}y$ のところは $\dfrac{\pi}{2}+\mathrm{Cos}^{-1}y$ でもよい．

$\boxed{4}$ (9) $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ とおく．領域 D を図示すると次のようになる．



上図より θ の動く範囲は $0\le\theta\le\pi/2$．各 θ に対して r の動く範囲を求める．$x^2+y^2\ge 1$ より $r\ge 1$ であり，一方 $(x-1)^2+(y-1)^2\le 2$ より

$$(r\cos\theta-1)^2+(r\sin\theta-1)^2\le 2 \quad\Leftrightarrow\quad r\{r-2(\cos\theta+\sin\theta)\}\le 0.$$

すなわち，$\boxed{E: 1\le r\le 2(\cos\theta+\sin\theta),\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}}$．これより，

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^{2(\cos\theta+\sin\theta)}\frac{1}{r}rdrd\theta\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(2(\cos\theta+\sin\theta)-1\Big)\,d\theta=\boxed{4-\frac{\pi}{2}}.\end{aligned}$$

$\boxed{5}$ (10) $x=r\sin\theta\cos\varphi$, $y=r\sin\theta\sin\varphi$, $z=r\cos\theta$ ($r\ge 0$, $0\le\theta\le\pi/2$, $-\pi\le\varphi\le\pi$) とおく．$1\le x^2+y^2+z^2\le 4$ より r の動く範囲は $1\le r\le 2$，$x\ge 0$ より φ の動く範囲は $-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$．さらに，

$$z\ge\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}} \quad\Leftrightarrow\quad r\cos\theta\ge\sqrt{\frac{r^2\sin^2\theta}{3}} \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{3}\ge\tan\theta$$

なので $0\le\theta\le\frac{\pi}{3}$．よって，$V$ の体積は

$$\iiint_V dxdydz=\int_1^2 dr\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{3}}r^2\sin\theta\,d\theta=\boxed{\frac{7}{6}\pi}.$$

$\boxed{6}$ (11) $|A|=\alpha(\alpha+1)(\alpha-1)$ なので，$\boxed{\alpha=-1,0,1}$．

(12) $\alpha_{\max}=1$ となる．このとき，$A=\begin{bmatrix}1&2&1\\1&1&1\\1&-2&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{行基本変形}}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$．よって，$\operatorname{Ker}f$ の基底を 1 組挙げると $\boxed{\left(\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\right)}$．

(13) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ 1 \\ -2\beta \end{bmatrix}$ を満たす $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ が存在すればよい．

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & \beta \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2\beta \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2-\beta \\ 0 & 1 & 0 & -1+\beta \\ 0 & 0 & 0 & 4-\beta \end{bmatrix}$$

となるので，$\boxed{\beta = 4}$．

7 (14) E を 3×3 単位行列とする．$|\lambda E - B| = (\lambda - 2)(\lambda - 1)^2$．よって，$B$ の固有値は $\lambda = \boxed{1, 2}$．

(15) 最大固有値は $\lambda = 2$． $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ を解いて基底を 1 組求めると $\boxed{\left(\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right)}$．

(16) 固有値 1 の固有空間の次元は 1 となる．よって，B のすべての固有空間の次元の和は $\boxed{2}$ となり，B は対角化可能でない．

8 (17) $f(\mathbf{a}_3) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ となるので，$(c_1, c_2) = \boxed{(-1, 2)}$．

(18) $(f(\mathbf{a}_1), f(\mathbf{a}_2), f(\mathbf{a}_3)) = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$．よって，$\boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}}$．

(19) $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ なので，$\boxed{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}$．

(20) $\mathcal{A}_1$ から $\mathcal{A}_2$ への基底変換行列は $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$．よって，$\mathcal{A}_2$，$\mathcal{B}_2$ に関する f の表現行列は

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}}.$$