数学演習第二 期末統一試験【問題用紙】

2021 年 2 月 3 日 実施 試験時間 90 分

– 解答用紙には答えのみ記入すること –

$\boxed{1}$ 2 変数関数 $g(x,y)=x^2y+y^3-2x$ に対して，$g(x,y)=0$ 上の点 $(1,1)$ のまわりで定義される陰関数を $y=\varphi(x)$ とし，$g(x,y)=0$ 上の点 $(0,0)$ のまわりで定義される陰関数を $x=\psi(y)$ とする．

(1) $\psi(y)=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{1\,\boxed{\text{イ}}\,\sqrt{1-y^4}}$ と表される．ア に入るべき y の多項式および イ に入るべき符号（$+$ または $-$）を答えよ．

(2) 曲線 $g(x,y)=0$ 上の点 $(1,1)$ における接線の方程式を求めよ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\varphi(x)-1}{1-\cos\{2(x-1)\}}$ を求めよ．

(4) $f(x,y)=y^2$ とする．$g(x,y)=0$ のもとで $f(x,y)$ が極大値をとる点 (a,b)（およびそのときの極大値）をすべて求めよ．解答欄には，「点 (a,b) で極大値 c をとる」という形式で答えを記せ．

$\boxed{2}$ 次の重積分を計算せよ．ただし，$\min(s,t)=\begin{cases} s & (s\le t)\\ t & (s>t)\end{cases}$ とする．

$$(5)\quad \iint_D \min(x^2,y)\,dxdy \qquad D:\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1$$

$$(6)\quad \iint_D |x-y|\,dxdy \qquad D: |x+2y|\le 1,\ |2x+y|\le 1$$

$$(7)\quad \iint_D (x+\sqrt{3}y)^2\,dxdy \qquad D: x^2+y^2\le 1,\ |y|\le x$$

$\boxed{3}$ (8) $f(x,y)$ を連続関数とするとき，累次積分 $I=\displaystyle\int_0^{\frac{5}{6}\pi}dx\int_{\frac{3}{5\pi}x}^{\sin x} f(x,y)\,dy$ の積分順序を交換すると，

$$I=\int_0^{\boxed{\text{ア}}}dy\int_{\mathrm{Sin}^{-1}y}^{\boxed{\text{イ}}} f(x,y)\,dx+\int_{\boxed{\text{ア}}}^{\boxed{\text{ウ}}}dy\int_{\mathrm{Sin}^{-1}y}^{\boxed{\text{エ}}} f(x,y)\,dx$$

となる．このとき，ア から エ に入るべき適切な数値または数式を答えよ．

$\boxed{4}$ (9) 重積分

$$J=\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy, \qquad D: (x-1)^2+(y-1)^2\le 2,\ x^2+y^2\ge 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0$$

を考える．D は極座標変換 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ により，

$$E: \boxed{\quad\text{ア}\quad}\le r\le \boxed{\quad\text{イ}\quad},\quad 0\le\theta\le\boxed{\quad\text{ウ}\quad}$$

にうつされる．この変換を用いて J の値を計算すると，$J=\boxed{\quad\text{エ}\quad}$ となる．このとき，ア から エ に入るべき適切な数値または数式を答えよ．

$\boxed{5}$ (10) 空間図形 $V: 1\le x^2+y^2+z^2\le 4,\ x\ge 0,\ z\ge\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}}$ の体積を求めよ．

$\boxed{6}$ 行列 $A = \begin{bmatrix} \alpha & 2 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & -2 & \alpha \end{bmatrix}$ (α は実数) の定める $\mathbb{R}^3$ の線形変換 $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$) に対して以下の設問に答えよ．

(11) $\dim \mathrm{Ker}\, f \neq 0$ となる α の値をすべて求めよ．

(12) (11) で求めた α のうち最大のものを $\alpha_{\max}$ と表す．$\alpha = \alpha_{\max}$ のとき，$\mathrm{Ker}\, f$ の基底を 1 組求めよ．

(13) $\alpha = \alpha_{\max}$ のとき，$\begin{bmatrix} \beta \\ 1 \\ -2\beta \end{bmatrix} \in \mathrm{Im}\, f$ となるような定数 β の値を求めよ．

$\boxed{7}$ 行列 $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ に対して以下の設問に答えよ．

(14) B の固有値をすべて求めよ．

(15) B の最大固有値の固有空間の基底を 1 組求めよ．

(16) B が対角化可能であるかどうか判定せよ．対角化可能であれば対角化して得られる対角行列を解答欄に記し，対角化可能でない場合には B のすべての固有空間の次元の和を解答欄に記すこと．

$\boxed{8}$ $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a_3} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{n} = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ とする．さらに，$\mathbf{a}_1$ と $\mathbf{a}_2$ によって張られる $\mathbb{R}^3$ の部分空間を $W = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$ とする．このとき，$\mathbb{R}^3$ から W への線形写像

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \left(\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} \right) \mathbf{n} \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3)$$

について考える．ここで，$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ は $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ に対する $\mathbb{R}^3$ の標準内積を表す．$\mathbb{R}^3$ の 2 つの基底を

$$\mathcal{A}_1 = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3), \quad \mathcal{A}_2 = \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right),$$

W の 2 つの基底を

$$\mathcal{B}_1 = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a_2}), \quad \mathcal{B}_2 = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right),$$

とする．以下の設問に答えよ．

(17) $f(\mathbf{a}_3) = c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2$ と表すとき，定数 c_1, c_2 の値を求めよ．

(18) $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{B}_1$ に関する f の表現行列を求めよ．

(19) 基底 $\mathcal{B}_1$ から $\mathcal{B}_2$ への基底変換行列を求めよ．

(20) $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{B}_2$ に関する f の表現行列を求めよ．